Rivista di matematica per le scienze economiche e sociali 21 (1998), 125 – 146

STOP-LOSS A TEMPO CONTINUO E PROTEZIONE DINAMICA DI UN FONDO D'INVESTIMENTO

HANS U. GERBER
Ecole des Hautes Etudes Commerciales
Università di Losanna, Svizzera

GERARD PAFUMI
Ecole des Hautes Etudes Commerciales
Università di Losanna, Svizzera

Versione definitiva pervenuta il 26/01/99

Nella prima parte del nostro lavoro, il surplus di una compagnia d'assicurazione è modellizzato come un processo di Wiener. Consideriamo un contratto d'assicurazione dinamica di solvibilità. Secondo questo contratto, i pagamenti necessari sono effettuati istantaneamente, in modo che il surplus modificato non divenga mai negativo. Matematicamente, questo corrisponde ad introdurre una barriera riflettente in zero. Otteniamo così un'espressione esplicita per il premio netto di un tale contratto.
Nella seconda parte, consideriamo un fondo d'investimento il cui valore unitario è modellizzato da un moto browniano geometrico. Differenti forme di protezione di fondi d'investimento sono esaminate. La più semplice consiste in una garanzia che fornisce istantaneamente i pagamenti necessari, di modo che il valore unitario modificato del fondo non scenda sotto un determinato livello protetto. Esiste un'espressione esplicita per il prezzo di una tale garanzia. Questo risultato può anche essere utilizzato per valutare il prezzo di una garanzia in cui il livello protetto è una funzione esponenziale del tempo. In più, è dimostrato come sintetizzare questa garanzia, costruendo il portafoglio replicante. La garanzia dinamica di fondi d'investimento è paragonata all'opzione di vendita corrispondente, e si è osservato che per delle scadenze corte, il rapporto dei due prezzi è di circa 2. Infine ci interesseremo al prezzo di una protezione più esotica, nella quale il valore unitario garantito in ogni momento è una frazione fissa del valore unitario modificato massimo osservato fino a quel momento.

1. Introduzione

Considereremo una compagnia il cui surplus è un processo stocastico che può assumere valori negativi. Proporremo un contratto (chiamato *assicurazione dinamica di solvibilità*) che, quando il surplus è negativo, prevede un pagamento pari all'ammontare del deficit, di modo che il surplus viene immediatamente riportato a zero. Il primo scopo è determinare il premio netto (singolo) di tale contratto, cioè l'aspettativa della somma dei pagamenti scontati. Risultati di questo tipo sono stati presentati da Pafumi nella sua discussione di Gerber Shiu (1998a) e anche dagli autori stessi nelle loro risposte. I loro risultati sono sotto protezione perpetua.

Nelle sezioni 3 e 4 esamineremo un modello dove il processo di surplus non modificato è un processo di Wiener. Questo modello non è realistico come quello composto di Poisson, ma ha il vantaggio di poter fare alcuni calcoli in maniera molto esplicita. Il teorema 1 fornisce un'espressione esplicita del premio netto singolo per la copertura in tempo finito. I metodi e i risultati delle sezioni 3 e 4 sono ripresi nelle sezioni seguenti.

Dalla sezione 5 considereremo un fondo d'investimento esaminando alcune forme di *protezione dinamica di un fondo d'investimento*. Faremo l'ipotesi classica che il valore di un'unità di fondo segua il moto browniano geometrico. Nelle sezioni 5 e 6 analizzeremo una garanzia che, secondo necessità, fornisce un saldo per impedire che il valore (modificato) dell'unità cada sotto il livello protetto. Il teorema 2 mostra una formula esplicita per il prezzo di non arbitraggio della garanzia a *tempo finito* del contratto. Nella sezione 7 esamineremo la garanzia più forte dove il livello protetto è una funzione esponenziale del tempo. Si dimostra che la valutazione di tale garanzia può essere ridotta alla valutazione di una garanzia a livello costante.

Gerber e Shiu (1998b, 1999) hanno calcolato i valori del prezzo delle garanzie con livelli protetti costanti ed esponenziali. Anche questi risultati sono però sotto protezione perpetua.

Nella sezione 8 discuteremo su come ottenere la protezione dinamica di un fondo d'investimento tramite la costruzione del portafoglio replicante. Si mostra esplicitamente come il patrimonio totale dovrebbe sempre essere ripartito tra investimenti rischiosi e privi di rischio.

Nella sezione 9 considereremo una garanzia più esotica nella quale il livello protetto è una percentuale fissa di un valore unitario modificato massimo osservato in passato. La discussione è limitata a protezione perpetua. Al fine di ottenere prezzi finiti dobbiamo presuporre che il fondo paghi dividendi contanti a tasso costante. L'analisi è strettamente legata a quella dell'opzione russa nelle sezione 10.11 di Panjer et al. (1998).

Nella sezione 10 la garanzia dinamica di fondo d'investimento è confrontata all'opzione di vendita europea corrispondente e ciò produce una soluzione statica. Si osserva che il rapporto dei prezzi tende a 2 per $T \to 0$.

2. Un'identità utile

Lo scopo di questa sezione è di presentare un'identità che faciliterà i calcoli nella sezione 4. Sia

$$n(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right), \qquad -\infty < x < \infty,$$

la funzione di densità della distribuzione normale con valor medio μ e varianza σ^2, e sia $\Phi(x)$ la funzione di distribuzione della normale standard. Di conseguenza le due formule seguenti possono essere verificate facilmente:

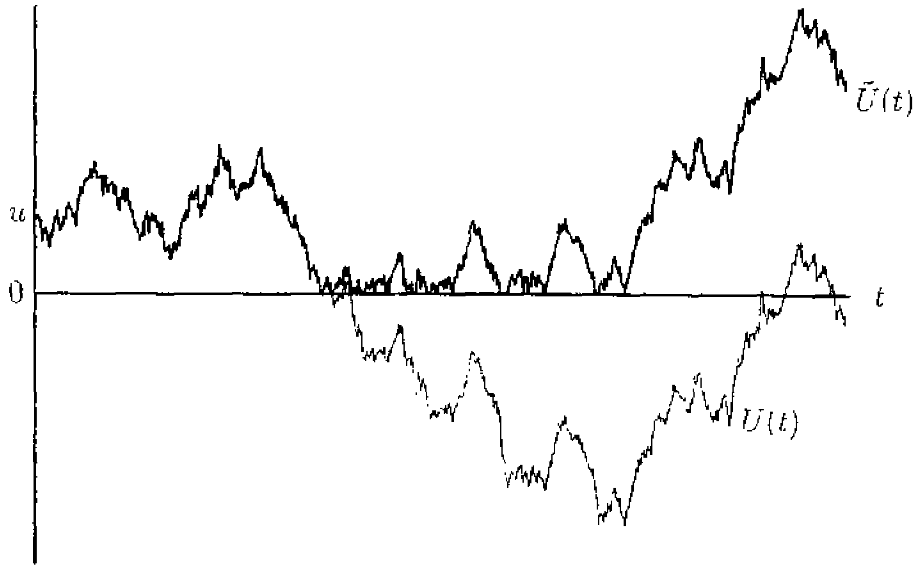

Fig. 1. Surplus con e senza assicurazione di solvibilità dinamica.

$$\int_0^\infty n(x;\mu,\sigma^2)dx = \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right), \tag{1}$$

e

$$e^{\kappa x}n(x;\mu,\sigma^2) = e^{\mu\kappa+\frac{1}{2}\sigma^2\kappa^2}n(x;\mu+\kappa\sigma^2,\sigma^2) \tag{2}$$

per qualsiasi numero κ. Combinando (1) e (2) otteniamo l'identità

$$\int_0^\infty e^{\kappa x}n(x;\mu,\sigma^2)dx = e^{\mu\kappa+\frac{1}{2}\sigma^2\kappa^2}\Phi\left(\frac{\mu+\kappa\sigma^2}{\sigma}\right). \tag{3}$$

3. Assicurazione di solvibilità — protezione perpetua

Consideriamo una compagnia con surplus iniziale u e surplus $U(t)$ al tempo t. Supponiamo che il processo di reddito netto sia un processo di Wiener con parametri costanti μ e σ. Perciò

$$U(t) = u + \mu t + \sigma W(t), \qquad t \geq 0,$$

dove $\{W(t)\}$ è un processo di Wiener standard. Consideriamo un contratto che fornisce essenzialmente l'assicurazione dinamica di solvibilità seguente: ogni volta che il surplus scende sotto 0, l'assicuratore provvede al saldo necessario per riportare il surplus a 0. Matematicamente ciò significa che il processo originale di surplus è modificato da una barriera riflettente in 0. Il surplus modificato è indicato con $\tilde{U}(t)$. Ciò è illustrato nella Figura 1.

Sia $P(t)$ il saldo cumulativo dell'assicuratore al tempo t. Allora $\tilde{U}(t) = U(t) + P(t)$. C'è una formula per $P(t)$:

$$P(t) = \max\left\{-\min_{0\le\tau\le t} U(\tau), 0\right\}.$$

Non useremo però esplicitamente questa formula in questa presentazione.

Per una data forza d'interesse $\delta > 0$, sia $A(u)$ il premio netto singolo della protezione perpetua di solvibilità, dunque

$$A(u) = E\left[\int_0^\infty e^{-\delta t} dP(t) \middle| U(0) = u\right]$$

è il valore previsto di tutti i pagamenti scontati fatti dall'assicuratore.

La funzione $A(u)$ può essere ottenuta tramite ragionamento euristico. Consideriamo il "piccolo" intervallo di tempo da 0 a dt. Allora, per $u > 0$, otteniamo

$$\begin{aligned} A(u) &= e^{-\delta dt} E[A(U(dt))] \\ &= e^{-\delta dt} E[A(u + \mu dt + \sigma W(dt))] \\ &= (1 - \delta dt)\left[A(u) + \mu A'(u)dt + \frac{1}{2}\sigma^2 A''(u)dt\right], \end{aligned}$$

cosicché deve essere verificata l'equazione differenziale

$$\frac{1}{2}\sigma^2 A''(u) + \mu A'(u) - \delta A(u) = 0.$$

Quindi otteniamo

$$A(u) = C_1 e^{\xi_1 u} + C_2 e^{\xi_2 u}, \qquad u \ge 0,$$

dove ξ_1, ξ_2 sono le soluzioni dell'equazione

$$\frac{1}{2}\sigma^2\xi^2 + \mu\xi - \delta = 0.$$

Notiamo che $\xi_1\xi_2 = -2\delta/\sigma^2$. Dunque, per esempio $\xi_1 < 0$, $\xi_2 > 0$. Se $A(u) \to 0$ per $u \to \infty$, allora $C_2 = 0$. Di conseguenza troviamo

$$A(u) = Ce^{-Ru}, \qquad u \ge 0, \tag{4}$$

dove $R = |\xi_1|$ è la soluzione positiva dell'equazione

$$\frac{1}{2}\sigma^2 R^2 - \mu R - \delta = 0, \tag{5}$$

cioè

$$R = \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 + 2\delta\sigma^2}}{\sigma^2}.$$

Per determinare il valore della costante C, esaminiamo la funzione $A(u)$ intorno a 0. A questo scopo confrontiamo due situazioni: (a) surplus iniziale 0 e (b) surplus iniziale ε (positivo, ma "piccolo"). Nella situazione (b) il surplus raggiungerà immediatamente il livello 0, e, a partire da quel momento, il processo di surplus modificato resterà il medesimo. I saldi dell'assicuratore sono gli stessi in entrambe le situazioni, ma egli all'inizio deve pagare ε in più nella situazione (a). Ne segue che

$$A(0) \approx A(\varepsilon) + \varepsilon$$

oppure

$$A'(0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{A(\varepsilon) - A(0)}{\varepsilon} = -1. \tag{6}$$

Sostituendo questo in (4), vediamo che $C = 1/R$. Perciò

$$A(u) = \frac{1}{R} e^{-Ru}, \qquad u \geq 0. \tag{7}$$

OSSERVAZIONE 1. Una derivazione alternativa di (4) comincia con l'osservazione che il processo $\left\{e^{-\delta t - RU(t)}\right\}_t$ è una martingala limitata e usa il teorema di Doob.

OSSERVAZIONE 2. Una giustificazione più formale di (6) utilizzerebbe il calcolo d'Itô.

OSSERVAZIONE 3. La formula (7) può essere trovato come (R.8) in Gerber e Shiu (1998A).

4. Assicurazione di solvibilità — tempo finito

Consideriamo ora un'assicurazione di solvibilità dinamica temporanea, dove la protezione è fornita solo fino al tempo T. Sia $A(u, T)$ il premio netto singolo. Possiamo considerare la protezione temporanea come una differenza tra una protezione differita che comincia al tempo T. Ne segue che

$$A(u, T) = A(u) - e^{-\delta T} \int_0^\infty A(x) p(x; u, T) dx, \tag{8}$$

dove $p(x; u, T)$, $x > 0$ indica la densita della distribuzione del surplus modificato al tempo T. Fortunamente esiste una funzione esplicita di questa densità:

$$\begin{aligned} p(x; u, T) =& n(x; u + \mu T, \sigma^2 T) \\ &+ e^{-2\mu u/\sigma^2} n(x; -u + \mu T, \sigma^2 T) \\ &- \frac{2\mu}{\sigma^2} e^{2\mu x/\sigma^2} \left[1 - \Phi\left(\frac{x + u + \mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right] \end{aligned} \tag{9}$$

(vedi formula (91), sezione 5.7 in Cox e Miller (1995)). Ora sostituiamo (7)) e (9) in (8). Di conseguenza dobbiamo calcolare tre integrali. Il primi due possono essere calcolati direttamente usando la (3), con $\kappa = -R$, visto che R soddisfa (5). In questo modo otteniamo

$$\begin{aligned} A(u,T) =& \frac{1}{R}e^{-Ru} \\ & - \frac{1}{R}e^{-Ru}\Phi\left(\frac{u+(\mu-R\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\ & - \frac{1}{R}e^{(R-\frac{2\mu}{\sigma^2})u}\Phi\left(\frac{-u+(\mu-R\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\ & + I \end{aligned} \tag{10}$$

dove

$$I = \frac{1}{R}\frac{2\mu}{\sigma^2}e^{-\delta T}\int_0^\infty e^{(\frac{2\mu}{\sigma^2}-R)x}\left[1-\Phi\left(\frac{x+u+\mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right]dx. \tag{11}$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R}\frac{2\mu}{\sigma^2}e^{(\frac{2\mu}{\sigma^2}-R)x} \\ =& \frac{1}{R}\frac{2\mu}{2\mu-\sigma^2 R}\frac{d}{dx}e^{(\frac{2\mu}{\sigma^2}-R)x} \\ =& -\frac{\mu}{\delta}\frac{d}{dx}e^{(\frac{2\mu}{\sigma^2}-R)x} \end{aligned}$$

mediante (5). Poi, integrando per parti (11) otteniamo

$$\begin{aligned} I =& \frac{\mu}{\delta}e^{-\delta T}\left[1-\Phi\left(\frac{u+\mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right] \\ & - \frac{\mu}{\delta}e^{-\delta T}\int_0^\infty e^{(\frac{2\mu}{\sigma^2}-R)x}n(x;-u-\mu T,\sigma^2 T)dx. \end{aligned}$$

Infine usiamo (3), con $\kappa = \frac{2\mu}{\sigma^2} - R$, e dopo qualche semplificazione otteniamo

$$\begin{aligned} I =& \frac{\mu}{\delta}e^{-\delta T}\left[1-\Phi\left(\frac{u+\mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right] \\ & - \frac{\mu}{\delta}e^{(R-\frac{2\mu}{\sigma^2})u}\Phi\left(\frac{-u+(\mu-R\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right). \end{aligned}$$

Sostituendo questa espressione in (10) otteniamo il risultato seguente:

TEOREMA 1.

$$\begin{aligned} A(u,T) =& \frac{1}{R}e^{-Ru}\Phi\left(\frac{-u-(\mu-R\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\ & + \frac{\mu}{\delta}e^{-\delta T}\Phi\left(\frac{-u-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\ & - \left(\frac{1}{R}+\frac{\mu}{\delta}\right)e^{(R-\frac{2\mu}{\sigma^2})u}\Phi\left(\frac{-u+(\mu-R\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right). \end{aligned}$$

Per un'illustrazione numerica, supponiamo $\mu = 1$, $\sigma = 2$ e $\delta = 0.05$. La Tabella 1 fornisce il premio netto singolo $A(u, T)$ per diversi valori del surplus iniziale u e la durata della protezione T. La Figura 2 mostra, per gli stessi parametri, il premio netto singolo come funzione di T per diversi valori di u.

Tabella 1. Premio netto singolo per assicurazione di solvibilità dinamica con $\mu = 1$, $\sigma = 2$ e $\delta = 0.05$

T/u	0	1	2	3	4	5
1	1.1456	0.4452	0.1474	0.0408	0.0093	0.0017
2	1.4051	0.6676	0.2953	0.1205	0.0450	0.0153
3	1.5438	0.7923	0.3897	0.1826	0.0811	0.0340
4	1.6291	0.8707	0.4523	0.2274	0.1103	0.0514
5	1.6854	0.9229	0.4953	0.2598	0.1327	0.0658
10	1.7965	1.0275	0.5847	0.3308	0.1858	0.1034
15	1.8219	1.0517	0.6062	0.3487	0.2001	0.1145
20	1.8290	1.0584	0.6122	0.3539	0.2044	0.1179
25	1.8311	1.0605	0.6141	0.3555	0.2058	0.1190
∞	1.8322	1.0615	0.6150	0.3563	0.2064	0.1196

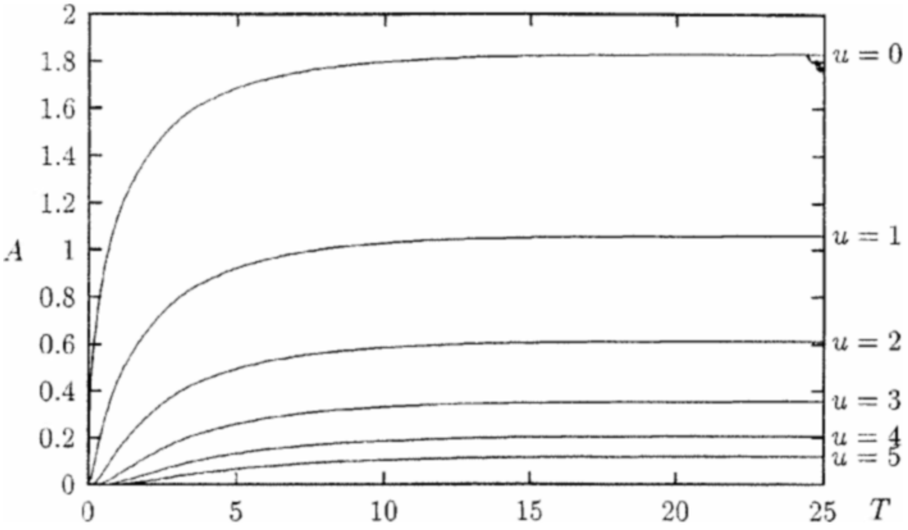

Fig. 2. Premio netto singolo per assicurazione di solvibilità dinamica come funzione di T con $\mu = 1, \sigma = 2$ e $\delta = 0.05$.

5. Protezione di fondi d'investimento — tempo infinito

Consideriamo un fondo d'investimento. Sia $F(t)$ il valore di un'unità di fondo al tempo t. Ci basiamo sul modello classico di moto browniano geometrico

$$F(t) = F(0)e^{\mu t + \sigma W(t)}, \qquad t \geq 0,$$

dove $\{W(t)\}$ è un processo di Wiener standard. Consideriamo inoltre una forza d'interesse costante senza rischio $r > 0$. Il processo $\{e^{-rt}F(t)\}$ è una martingala per

$$\mu = r - \frac{1}{2}\sigma^2. \tag{12}$$

Supponiamo che tutti i dividendi siano reinvestiti nel fondo. Di conseguenza il prezzo di un titolo derivato è calcolato come somma scontata attesa dei pagamenti corrispondenti, con μ ricavato da (12).

Ora consideriamo un contratto che cambia il valore unitario $F(t)$ in un valore unitario modificato $\tilde{F}(t)$ nel modo seguente. Sia $\tilde{F}(0) = F(0)$ e sia K il valore unitario protetto ($0 < K \leq F(0)$). Se $\tilde{F}(t) > K$ in alcuni intervalli di tempo, il tasso istantaneo di rendimento di $\left\{\tilde{F}(t)\right\}$ è identico a quello di $\{F(t)\}$. Quando $\tilde{F}(t)$ scende fino a K, si aggiungerà la somma necessaria di denaro affinché $\tilde{F}(t)$ non scenda sotto K.

Notiamo che questa costruzione può essere collegata al "contesto" della sezione 3. È sufficiente porre $\delta = r$, e

$$\begin{aligned} u &= \ln(f/K), \qquad \text{con} \quad f = F(0), \\ H(t) &= \ln(F(t)/K), \\ \tilde{H}(t) &= \ln(\tilde{F}(t)/K). \end{aligned}$$

Sia $V(f)$ il prezzo del contratto e sia $\mathcal{V}(u)$, $u \geq 0$, la funzione definita dalla relazione

$$\mathcal{V}(u) = V(f).$$

Per $u > 0$, la funzione $\mathcal{V}(u)$ si comporta come la funzione $A(u)$ nella sezione 3. Dunque

$$\mathcal{V}(u) = Ce^{-Ru}, \qquad u \geq 0,$$

per una opportuna costante C. Se sostituiamo δ con r e μ secondo (12) in (5), vediamo che

$$R = \frac{2r}{\sigma^2}. \tag{13}$$

Allora

$$V(f) = \mathcal{V}(\ln(f/K)) = C(K/f)^R, \qquad f \geq K.$$

Resta da determinare il valore della costante C. Per le stesse ragioni che hanno portato a (6), abbiamo

$$V'(K) = -1. \tag{14}$$

Ne segue che $C = K/R$ e

$$V(f) = \frac{K}{R}\left(\frac{K}{f}\right)^{R}, \qquad f \geq K,$$

$$\mathcal{V}(u) = \frac{K}{R}e^{-Ru}, \qquad u \geq 0 \tag{15}$$

6. Protezione di fondi d'investimento — tempo finito

Supponiamo ora che la protezione dinamica del fondo sia solo temporanea e cessi al tempo T. Il prezzo lo indichiamo con $V(f,T)$ o $\mathcal{V}(u,T)$ in funzione della variabile $u = \ln(f/K)$.

Osserviamo che

$$\mathcal{V}(u,T) = \mathcal{V}(u) - e^{-rT}\int_0^\infty \mathcal{V}(x)p(x;u,T)dx, \tag{16}$$

con $\mathcal{V}(u)$ come in (15) e $p(x;u,T)$ come in (9). I calcoli che ne risultano sono essenzialmente uguali a quelli che hanno portato al teorema 1. Perciò possiamo utilizzare il teorema 1 apportando le sostituzioni opportune. In questo modo troviamo che

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(u,T) = &\frac{K}{R}e^{-Ru}\Phi\left(\frac{-u+(r+\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\\ &+K\left(1-\frac{\sigma^2}{2r}\right)e^{-rT}\Phi\left(\frac{-u-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\\ &-Ke^{u}\Phi\left(\frac{-u-(r+\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right),\end{aligned}$$

con R definito da (13). Infine esprimiamo il prezzo in termini del valore iniziale f di un'unità di fondo:

TEOREMA 2.

$$\begin{aligned}V(f,T) = &\frac{K}{R}\left(\frac{K}{f}\right)^{R}\Phi\left(\frac{\ln(K/f)+\frac{1}{2}\sigma^2T(R+1)}{\sigma\sqrt{T}}\right)\\ &+K\left(1-\frac{1}{R}\right)e^{-rT}\Phi\left(\frac{\ln(K/f)-\frac{1}{2}\sigma^2T(R-1)}{\sigma\sqrt{T}}\right)\\ &-f\Phi\left(\frac{\ln(K/f)-\frac{1}{2}\sigma^2T(R+1)}{\sigma\sqrt{T}}\right).\end{aligned}$$

Per un'illustrazione numerica prendiamo $f = 100$ e $\sigma = 0.2$. Le tabelle 2-5 danno i prezzi della garanzia per $r = 0.01, 0.02, 0.03, 0.04$. La Figura 3 mostra,

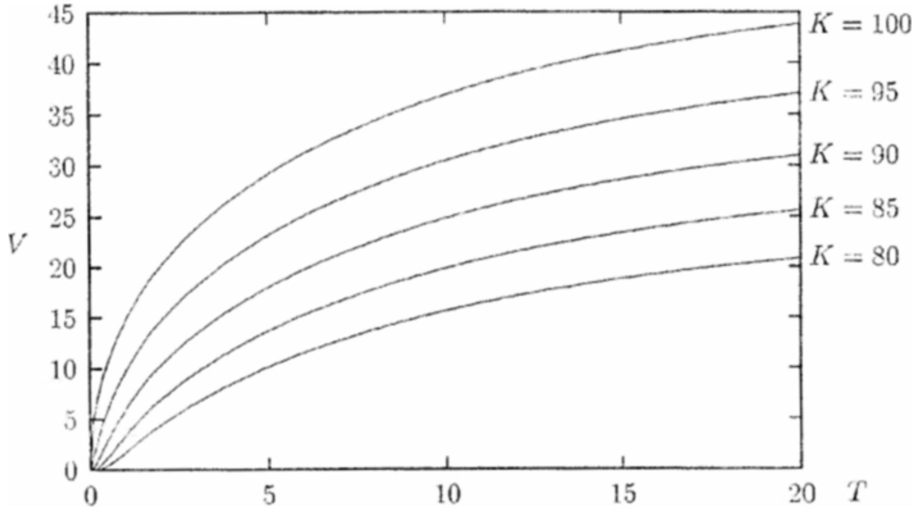

Fig. 3. Prezzo della garanzia come funzione di T con $f = 100, \sigma = 0.2$ e $r = 0.04$.

per $r = 0.04$, il prezzo della garanzia come funzione di T per diversi valori di K. Fino a $f = 100$, il valore protetto K e il prezzo possono essere interpretati come percentuale del valore iniziale dell'unità di fondo.

7. Protezione con una forza di rendimento garantita

Consideriamo ora una garanzia più forte dove il valore garantito di un'unità di fondo al tempo t è $Ke^{\gamma t}$ $(0 < \gamma < r)$. Dunque, se $\tilde{F}(t) > Ke^{\gamma t}$, i tassi istantanei di rendimento di $F(t)$ e $F(t)$ sono gli stessi, e quando $\tilde{F}(t)$ raggiunge il limite $Ke^{\gamma t}$, la somma necessaria di denaro e fornita di modo che il valore modificato dell'unità non cada sotto il limite. I processi $\{F(t)\}$ e $\left\{\tilde{F}(t)\right\}$ possono anche essere espressi secondo il linguaggio delle sezioni 3 e 4: questa volta poniamo

$$\begin{aligned} U(t) &= \ln\left(F(t)/\left(Ke^{\gamma t}\right)\right) \\ &= u + (\mu - \gamma)t + \sigma W(t), \qquad t \geq 0. \end{aligned}$$

e

$$\tilde{U}(t) = \ln\left(\tilde{F}(t)/\left(Ke^{\gamma t}\right)\right), \qquad t \geq 0.$$

Poichè il processo

$$\left\{e^{-rt+\mu t+\sigma W(t)}\right\}$$

Tabella 2. Prezzo della garanzia con $f = 100$, $\sigma = 0.2$ e $r = 0.04$

T/K	80	85	90	95	100
1/12	0.0001	0.0065	0.1304	1.0797	4.5189
2/12	0.0109	0.1093	0.6338	2.3761	6.3359
3/12	0.0624	0.3340	1.2463	3.4770	7.7069
4/12	0.1626	0.6313	1.8676	4.4370	8.8463
5/12	0.3035	0.9659	2.4766	5.2943	9.8376
6/12	0.4746	1.3180	3.0481	6.0732	10.7233
1	1.7709	3.4239	6.0120	9.7476	14.7931
2	4.4061	6.9231	10.3118	14.6840	20.1295
5	10.1373	13.7031	18.0257	23.1640	29.1716
10	15.6391	19.8688	24.7909	30.4504	36.8905
20	20.8713	25.3995	30.9831	37.0026	43.5762
∞	25.0000	30.7063	36.4700	42.8688	50.0000

Tabella 3. Prezzo della garanzia con $f = 100$, $\sigma = 0.2$ e $r = 0.03$

T/K	80	85	90	95	100
1/12	0.0001	0.0068	0.1347	1.1017	4.5613
2/12	0.0116	0.1148	0.6572	2.4346	6.4212
3/12	0.0666	0.3520	1.2965	3.5742	7.8352
4/12	0.1743	0.6671	1.9183	4.5738	9.0180
5/12	0.3261	1.0233	2.5840	5.4712	10.0526
6/12	0.5111	1.3998	3.1955	6.2905	10.9818
1	1.9299	3.6794	6.3760	10.2160	15.3135
2	4.8907	7.5736	11.1267	15.6385	21.1718
5	11.7043	15.5702	20.1716	25.5457	31.7223
10	18.9143	23.6008	28.9444	34.9691	41.6562
20	26.8961	32.2992	38.3106	44.9490	52.2324
∞	38.1622	44.4075	51.2289	58.6432	66.6667

è una martingala per $\mu = r - \frac{1}{2}\sigma^2$, ne segue che anche

$$\left\{e^{-(r-\gamma)t+B(t)}\right\}$$

è una martingala. Possiamo quindi usare le formule della sezione precedente per $V(f)$ e $V(f,T)$ sostituendo r con il tasso modificato $r-\gamma$.

ESEMPIO. Prendiamo $\sigma = 0.2$, $r = 0.04$ e $f = 100$. Il prezzo della garanzia con $\gamma = 0.03$ può essere ottenuto direttamente dalla Tabella 5 dove $r = 0.04 - 0.03 = 0.01$. Per esempio il prezzo per una garanzia di 2 anni, con $K = 95$ e $\gamma = 0.03$, è 17.7125.

Tabella 4. Prezzo della garanzia con $f = 100$, $\sigma = 0.2$ e $r = 0.02$

T/K	80	85	90	95	100
1/12	0.0001	0.0071	0.1391	1.1241	1.6640
2/12	0.0124	0.1206	0.6813	2.4942	6.5070
3/12	0.0712	0.3709	1.3484	3.6734	7.9660
4/12	0.1867	0.7047	2.0319	4.7138	9.1930
5/12	0.3501	1.0836	2.7015	5.6526	10.2720
6/12	0.5409	1.4856	3.3485	6.5137	11.2460
1	2.1006	3.9500	6.7573	10.6903	15.8519
2	5.4183	8.2733	11.9943	16.6475	22.2703
5	13.4764	17.6586	22.5512	28.1713	34.5279
10	22.8233	28.0101	33.8137	40.2397	47.2911
20	31.7301	[illegible]	47.7147	55.0245	62.5967
∞	64.0000	72.2500	81.0000	90.2500	100.0000

Tabella 5. Prezzo della garanzia con $f = 100$, $\sigma = 0.2$ e $r = 0.01$

T/K	80	85	90	95	100
1/12	0.0001	0.0074	0.1437	1.1469	1.6471
2/12	0.0132	0.1266	0.7062	2.5518	6.5948
3/12	0.0760	0.3905	1.4019	3.7747	8.0979
4/12	0.1998	0.7440	2.1182	4.8570	9.3706
5/12	0.3756	1.1468	2.8231	5.8385	10.4960
6/12	0.5913	1.5758	3.5071	6.7430	11.5167
1	2.2837	4.2363	7.1562	11.1887	16.4088
2	5.9916	9.0243	12.9165	17.7125	23.4267
5	15.4719	19.9862	25.1821	31.0586	37.6072
10	27.4617	33.1947	39.5000	46.3676	53.7858
20	44.9721	52.1171	59.7563	67.8779	76.4700
∞	143.1084	156.7323	170.7630	185.1891	200.0000

8. Protezione sintetica di un fondo d'investimento

Un modo per ottenere la protezione dinamica di un fondo d'investimento è usare il *portafoglio replicante* come strategia d'investimento. Consideriamo un investitore con un capitale iniziale $a = f + V(f, T)$. Invece di acquistare la protezione da un agente esterno, investe la somma e adotta una strategia che permetta al totale degli attivi di corrispondere, a qualsiasi tempo t, esattamente alla somma del valore unitario modificato e del prezzo della rimanente garanzia:

$$A(t) = \bar{F}(t) + V(\bar{F}(t), T - t), \qquad 0 \leq t \leq T. \tag{17}$$

La strategia consiste nello stanziare al tempo t la somma

$$\bar{F}(t)\left(1 + V_f(\bar{F}(t), T - t)\right)$$

per l'investimento rischioso, e il complemento, la somma

$$
\begin{aligned}
A(t) &- \hat{F}(t)\left(1 + V_f(\hat{F}(t), T - t)\right) \\
&= V(\hat{F}(t), T - t) - \hat{F}(t)V_f(\hat{F}(t), T - t).
\end{aligned}
$$

per l'investimento privo di rischio. Questo risultato (dove il pedice f indica la derivata parziale rispetto a f) si ottiene da una formula molto nota che si può trovare per esempio classificata quale formula (10.6.6) in Panjer et al. (1998), a pagina 95 di Baxter e Rennie (1996) o nella sezione 9.3 di Dothan (1990).

Per comodità tipografica (e senza perdita di generalità) poniamo $t = 0$, $\hat{F}(0) = f$, $A(0) = a$ nel seguito. Dal Teorema 2, dopo qualche semplificazione, otteniamo la formula:

$$
\begin{aligned}
V_f(f, T) &= \left(\frac{K}{f}\right)^{R+1} \Phi\left(\frac{\ln(K/f) + \frac{1}{2}\sigma^2 T(R+1)}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\
&\quad - \Phi\left(\frac{\ln(K/f) - \frac{1}{2}\sigma^2 T(R+1)}{\sigma\sqrt{T}}\right).
\end{aligned}
$$

La strategia è quindi di investire la somma

$$
\begin{aligned}
f \Bigg\{ 1 &- \left(\frac{K}{f}\right)^{R+1} \Phi\left(\frac{\ln(K/f) + \frac{1}{2}\sigma^2 T(R+1)}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\
&- \Phi\left(\frac{\ln(K/f) - \frac{1}{2}\sigma^2 T(R+1)}{\sigma\sqrt{T}}\right) \Bigg\}
\end{aligned}
\tag{18}
$$

nell'attivo rischioso, e la somma

$$
\begin{aligned}
&\left(1 + \frac{1}{R}\right) K \left(\frac{K}{f}\right)^{R} \Phi\left(\frac{\ln(K/f) + \frac{1}{2}\sigma^2 T(R+1)}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\
&+ \left(1 - \frac{1}{R}\right) K e^{-rT} \Phi\left(\frac{\ln(K/f) - \frac{1}{2}\sigma^2 T(R-1)}{\sigma\sqrt{T}}\right)
\end{aligned}
\tag{19}
$$

in quello privo di rischio. Notiamo che questa scomposizione di totale degli attivi in rischiosi e non rischiosi è differente da quella in valore unitario modificato e prezzo della rimanente garanzia come in (17).

Per protezione a tempo infinito, le espressioni (18) e (19) possono essere semplificate notevolmente. Prendendo il limite $T \to \infty$ in (18) e (19) vediamo che le due componenti sono

$$
f \left\{ 1 - \left(\frac{K}{f}\right)^{R+1} \right\} \tag{20}
$$

e

$$
f \left(1 + \frac{1}{R}\right) \left(\frac{K}{f}\right)^{R+1}. \tag{21}
$$

Per un'illustrazione numerica, prendiamo $\sigma = 0.2$ e $r = 0.04$ come nella Tabella 2. Le Tabelle 6 (per $K = 100$) e 8 (per $K = 95$) mostrano il valore unitario del fondo come funzione del totale degli attivi e tempo rimanente di garanzia, cioè f, la soluzione di $a = f + V(f, T - t)$. Naturalmente, per un dato valore di a, il valore unitario del fondo è una funzione decrescente sia del tempo rimanente di garanzia $T - t$ sia del valore protetto K. Questo è sottolineato anche dai grafici delle Figure 4 e 5. Le Tabelle 7 (per $K = 100$) e 9 (per $K = 95$) mostrano come è stato costruito il portafoglio replicante e esprimono la somma investita nell'attivo rischioso (vedi (18) e (20)) come una percentuale del totale degli attivi.

Tabella 6. Valore unitario del fondo come funzione del totale degli attivi e del tempo rimanente di garanzia, con $K = 100$, $\sigma = 0.2$ e $r = 0.04$.

$a \backslash T - t$	∞	20	10	5	4	3	2	1	6/12	3/12
110	–	–	–	–	–	–	–	–	–	[illegible]
115	–	–	–	–	–	–	–	102.75	111.91	114.22
120	–	–	–	–	–	–	–	117.07	118.63	119.75
125	–	–	–	–	–	107.79	116.22	122.21	124.35	124.92
130	–	–	–	107.93	114.13	119.52	124.27	128.33	129.69	129.98
135	–	–	–	120.16	123.91	127.55	131.02	133.97	134.85	134.99
140	–	–	115.09	128.79	131.61	134.44	137.15	139.36	139.93	140
145	–	100.03	125.84	136.15	138.44	140.75	142.9	144.60	144.97	145
150	100	122.77	134.27	142.84	144.77	146.70	148.18	149.75	149.99	150
155	120.65	132.18	141.71	149.11	150.78	152.41	153.88	154.85	154.99	155
160	130.75	140.23	148.58	155.11	156.56	157.95	159.16	159.91	160	160
165	139.19	147.56	155.07	160.91	162.17	163.37	164.38	164.94	165	165
170	146.80	154.12	161.29	166.55	167.66	168.70	169.53	169.96	170	170
175	153.89	160.97	167.30	172.08	173.06	173.96	174.65	174.98	175	175
180	160.62	167.27	173.16	177.51	178.39	179.16	179.74	179.99	180	180
185	167.09	173.39	178.90	182.88	183.65	184.32	184.80	184.99	185	185
190	173.36	179.36	184.54	188.18	188.87	189.45	189.85	190	190	190

Tabella 7. Investimento rischioso come percentuale del totale degli attivi nel portafoglio replicante con $K = 100$, $\sigma = 0.2$ e $r = 0.04$.

$a \backslash T - t$	∞	20	10	5	4	3	2	1	6/12	3/12
110	–	–	–	–	–	–	–	–	–	56.02
115	–	–	–	–	–	–	–	13.18	62.63	84.19
120	–	–	–	–	–	–	–	59.06	81.71	94.39
125	–	–	–	–	–	23.69	50.12	75.45	90.77	98.09
130	–	–	–	18.55	36.54	51.07	66.26	84.67	95.38	99.10
135	–	–	–	45.65	54.08	64.54	76.07	90.31	97.73	99.83
140	–	–	30.96	58.72	65.50	73.31	82.66	93.85	98.91	99.95
145	–	17.70	47.17	67.43	73.00	79.51	87.28	96.11	99.19	99.99
150	0	38.74	57.13	73.76	78.52	84.08	90.60	97.55	99.77	100
155	33.52	49.76	64.29	78.59	82.72	87.52	93.02	98.46	99.90	100
160	45.17	57.45	69.77	82.35	85.09	90.16	94.80	99.04	99.96	100
165	53.08	63.29	74.12	85.35	88.57	92.20	96.12	99.40	99.98	100
170	59.05	67.94	77.65	87.77	90.63	93.80	97.10	99.63	99.99	100
175	63.50	71.74	80.57	89.74	92.28	95.05	97.83	99.77	100	100
180	67.70	74.91	83.01	91.36	93.62	96.04	98.38	99.86	100	100
185	70.96	77.59	85.08	92.69	94.72	96.83	98.78	99.92	100	100
190	73.73	79.88	86.84	93.81	95.61	97.45	99.09	99.95	100	100

Tabella 8. Valore unitario del fondo come funzione del totale degli attivi e del tempo rimanente di garanzia, con $K = 95, \sigma = 0.2$ e $r = 0.04$.

$a \backslash T-t$	∞	20	10	5	4	3	2	1	6/12	3/12
110	–	–	–	–	–	–	–	100.88	107.44	109.38
115	–	–	–	–	–	–	101.31	110.88	113.59	114.81
120	–	–	–	–	–	106.17	112.62	117.69	119.49	119.94
125	–	–	–	106.76	111.74	116.13	120.17	123.64	124.77	124.99
130	–	–	–	117.39	120.54	123.67	126.67	129.18	129.90	130
135	–	–	111.09	125.40	127.81	130.25	132.61	134.50	134.95	135
140	–	110.60	123.50	132.41	134.42	136.42	138.30	139.70	139.98	140
145	108.76	121.56	131.36	138.87	140.56	142.24	143.77	144.82	144.99	145
150	120.45	130.11	138.45	144.98	146.44	147.86	149.10	149.89	150	150
155	129.40	137.68	145.08	150.85	152.11	153.32	154.24	154.93	155	155
160	137.24	144.68	151.38	156.54	157.64	158.67	159.52	159.96	160	160
165	144.36	151.31	157.15	162.10	163.07	163.55	164.61	164.98	165	165
170	151.06	157.66	163.21	167.56	168.41	169.17	169.71	169.99	170	170
175	157.78	163.81	169.10	172.93	173.68	174.34	174.80	174.99	175	175
180	164.08	169.80	174.75	178.25	178.91	179.47	179.86	180	180	180
185	170.20	175.66	180.31	183.51	184.09	184.58	184.89	185	185	185
190	176.19	181.42	185.80	188.72	189.24	189.66	189.92	190	190	190

Tabella 9. Investimento rischioso come percentuale del totale degli attivi nel portafoglio replicante con $K = 95, \sigma = 0.2$ e $r = 0.04$.

$a \backslash T-t$	∞	20	10	5	4	3	2	1	6/12	3/12
110	–	–	–	–	–	–	–	28.26	66.82	86.76
115	–	–	–	–	–	–	23.15	63.47	84.17	95.50
120	–	–	–	–	–	34.07	55.34	78.36	92.29	98.58
125	–	–	–	30.77	43.62	56.07	69.83	86.75	96.30	99.59
130	–	–	–	51.21	59.19	68.16	78.78	91.81	98.26	99.89
135	–	–	39.05	62.76	68.96	76.17	84.30	94.93	99.21	99.97
140	–	30.15	52.36	70.66	75.81	81.84	88.99	96.87	99.65	99.99
145	25.01	45.12	61.16	76.46	80.86	86.01	91.97	98.08	99.85	100
150	40.91	54.49	67.62	80.87	84.70	89.13	94.12	98.83	99.94	100
155	50.15	61.30	72.62	84.32	87.68	91.51	95.68	99.29	99.97	100
160	57.32	66.57	76.61	87.06	90.02	93.33	96.82	99.57	99.99	100
165	62.65	70.80	79.85	89.26	91.87	94.75	97.66	99.74	100	100
170	66.91	74.28	82.53	91.04	93.36	95.85	98.28	99.85	100	100
175	70.48	77.19	84.77	92.50	94.55	96.71	98.73	99.91	100	100
180	73.46	79.66	86.68	93.70	95.52	97.39	99.06	99.95	100	100
185	76.00	81.77	88.28	94.69	96.30	97.92	99.31	99.97	100	100
190	78.20	83.59	89.66	95.51	96.94	98.35	99.49	99.98	100	100

9. Protezioni esotiche

Consideriamo infine schemi esotici dove il valore garantito di un'unità di fondo è dipendente dalla traiettoria percorsa. Per esempio, il valore garantito al tempo t potrebbe essere una frazione fissa del valore unitario massimo osservato fino al tempo t. Analizziamo una protezione leggermente diversa dove il valore unitario garantito al tempo t è una frazione fissa del valore unitario massimo *modificato* che è stato osservato fino al tempo t.

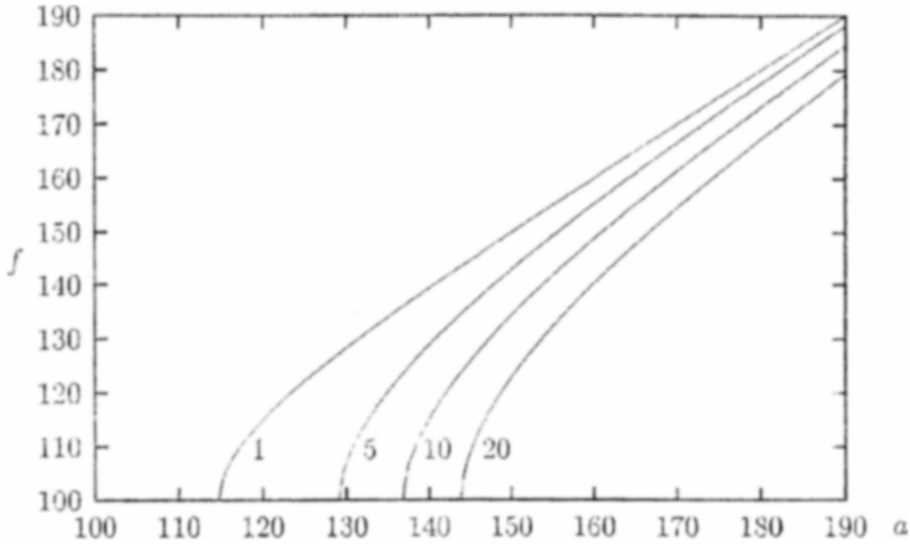

Fig. 4. Valore unitario del fondo come funzione del totale degli attivi con $K = 100, \sigma = 0.2$ e $r = 0.04$, per $T - t = 1, 5, 10, 20$.

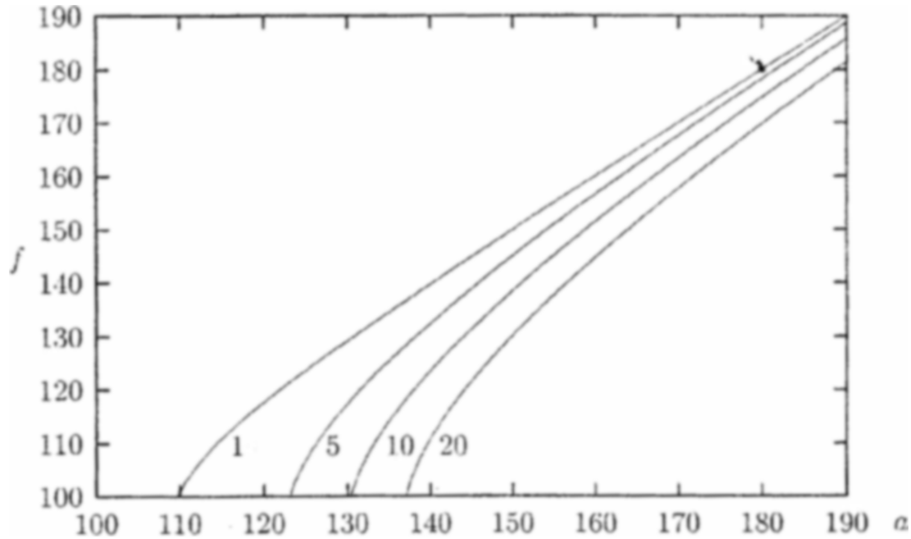

Fig. 5. Valore unitario del fondo come funzione del totale degli attivi con $K = 95, \sigma = 0.2$ e $r = 0.04$, per $T - t = 1, 5, 10, 20$.

Sia $0 < \varphi < 1$ la frazione garantita del massimo $\tilde{M}(t)$. Dunque, se $\tilde{F}(t) > \varphi\tilde{M}(t)$ i tassi istantanei di rendimento di $\tilde{F}(t)$ e $F(t)$ sono gli stessi e quando $F(t)$ raggiunge la barriera $\varphi\tilde{M}(t)$, la somma di denaro necessaria è fornita cosicché il valore unitario modificato non scenda sotto la barriera. Il processo massimo $\left\{\tilde{M}(t)\right\}$ è definito come

$$\tilde{M}(t) = \max\left\{m, \max_{0\le\tau\le t} \tilde{F}(\tau)\right\},$$

dove m è un valore iniziale come quello $\varphi m \le f \le m$.

Ci limitiamo al caso con tempo infinito. Come vedremo, sfortunatamente il prezzo di questo contratto è infinito se è calcolato come nella sezione 5. Di conseguenza, supponiamo, forse in modo opportunistico, che il prezzo di un titolo sia la somma scontata attesa dei pagamenti corrispondenti, dove il valore atteso è ora calcolato secondo

$$\mu = r - d - \frac{1}{2}\sigma^2, \qquad \text{con } d > 0. \tag{22}$$

Una spiegazione è che il fondo paga dividendi in contanti a un tasso proporzionale costante d, di modo che il processo

$$\left\{e^{-(r-d)t}F(t)\right\}$$

è una martingala.

Sia $V(f, m; \varphi)$ il prezzo della garanzia. In primo luogo osserviamo che questa è una funzione omogenea di grado 1 delle variabili f e m. Quindi

$$V(f, m; \varphi) = mV(f/m, 1; \varphi). \tag{23}$$

Sia $\varphi m < f < m$. Distinguendo se il processo $F(t)$ scende prima al livello φm o sale fino al livello m, vediamo che

$$V(f/m, 1; \varphi) = V(\varphi, 1; \varphi)A(f/m; \varphi, 1) + V(1, 1; \varphi)B(f/m; \varphi, 1). \tag{24}$$

Le funzioni A e B sono definite come nella sezione 10.10 di Panjer et al. (1998). Sono entrambe combinazione lineare di $(f/m)^{\theta_1}$ e $(f/m)^{\theta_2}$, dove θ_1 e θ_2 sono le soluzioni dell'equazione quadratica

$$\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 + \mu\theta - r = 0,$$

con μ dato da (22). Se θ_1 indica la soluzione più piccola, allora $\theta_1 < 0$ e $\theta_2 > 1$. Da (24) risulta che $V(f/m, 1; \varphi)$ è anche una combinazione lineare di $(f/m)^{\theta_1}$ e $(f/m)^{\theta_2}$. Dunque

$$V(f/m, 1; \varphi) = C_1(f/m)^{\theta_1} + C_2(f/m)^{\theta_2},$$

dove i coefficienti C_1 e C_2 dipendono unicamente da φ. Allora, da (23)

$$V(f, m; \varphi) = C_1 f^{\theta_1} m^{1-\theta_1} + C_2 f^{\theta_2} m^{1-\theta_2}, \qquad \varphi m \le f \le m. \tag{25}$$

Per determinare i coefficienti esaminiamo questa funzione al contorno. Per le stesse ragioni che portarono a (6) e (14) dobbiamo avere:

$$\left.\frac{\partial V}{\partial f}\right|_{f=\varphi m} = -1, \tag{26}$$

che fornisce la condizione:

$$C_1 \theta_1 \varphi^{\theta_1 - 1} + C_2 \theta_2 \varphi^{\theta_2 - 1} = -1. \tag{27}$$

Per lo stesso motivo che porta a (10.11.7) in Panjer et al. (1998), abbiamo

$$\left.\frac{\partial V}{\partial m}\right|_{f=m} = 0,$$

che fornisce la condizione:

$$C_1(1-\theta_1) + C_2(1-\theta_2) = 0. \tag{28}$$

Risolvendo le equazioni (27) e (28) otteniamo

$$C_1 = \frac{\frac{1}{1-\theta_1}}{-\frac{\theta_1}{1-\theta_1}\varphi^{\theta_1-1} - \frac{\theta_2}{\theta_2-1}\varphi^{\theta_2-1}},$$
$$C_2 = \frac{\frac{1}{\theta_2-1}}{-\frac{\theta_1}{1-\theta_1}\varphi^{\theta_1-1} - \frac{\theta_2}{\theta_2-1}\varphi^{\theta_2-1}}.$$

Sostituendo in (25) questi valori, abbiamo

$$V(f, m; \varphi) = m \frac{\frac{1}{1-\theta_1}(f/m)^{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2-1}(f/m)^{\theta_2}}{-\frac{\theta_1}{1-\theta_1}\varphi^{\theta_1-1} - \frac{\theta_2}{\theta_2-1}\varphi^{\theta_2-1}}. \tag{29}$$

Notiamo che il numeratore è positivo, ma il denominatore è positivo solo se

$$\varphi < \left(\frac{-\theta_1}{1-\theta_1}\frac{\theta_2-1}{\theta_2}\right)^{\frac{1}{\theta_2-\theta_1}}. \tag{30}$$

Il prezzo della garanzia è dunque dato dalla formula (29), a condizione che valga la disuguaglianza (30). Se (30) non fosse verificata il "prezzo" della garanzia risulterebbe infinito. Considerando il limite $d \to 0$ ($\theta_1 \to 0$, $\theta_2 \to 1$) l'espressione a secondo membro di (30) è 0. Dunque se $d = 0$, il "prezzo" è infinito per qualsiasi $\varphi > 0$.

L'espressione a secondo membro di (30) appare nella formula (10.11.11) di Panjer et al. (1998) quale $\tilde{\varphi}$, valore ottimale nel contesto di un'opzione russa. Vedi anche la formula (2.3) in Shepp e Shiryaev (1993). La formula (30) afferma dunque che φ deve essere più piccolo di $\tilde{\varphi}$.

In particolare, per $\varphi = \tilde{\varphi}$ il "prezzo" sarebbe infinito. Ciò può essere spiegato come segue. Consideriamo un' opzione russa e la sua funzione di prezzo $R(f, m; \varphi)$ (che è indicata dal simbolo $V(f, m; \varphi)$ nella sezione 10.11 di Panjer et al. (1998)), allora per $\varphi m < f < m$ il prezzo della garanzia può essere descritto come

$$V(f, m; \varphi) = R(f, m; \varphi)V(\varphi, 1; \varphi).$$

Da questa relazione segue che

$$\left.\frac{\partial V}{\partial f}\right|_{f=\varphi m} = \left.\frac{\partial R}{\partial f}\right|_{f=\varphi m} V(\varphi, 1; \varphi).$$

Ma per $\varphi = \tilde{\varphi}$ abbiamo la "smooth pasting condition"

$$\left.\frac{\partial R}{\partial f}\right|_{f=\tilde{\varphi} m} = 0,$$

(vedi formula (9.12) di Gerber e Shiu (1996)). Questo mostra che per $\varphi = \tilde{\varphi}$ la condizione (26) non può essere soddisfatta. Dunque per $\varphi = \tilde{\varphi}$ non c'è prezzo finito per la garanzia.

10. Osservazioni conclusive

In questo articolo abbiamo analizzato soluzioni alternative per due problemi classici. Il primo problema consiste nell'assicurare la solvibilità di una compagnia di assicurazione. Se lo scopo è la solvibilità della compagnia al tempo T, la soluzione classica minima è fornita da un contratto stop-loss che protegge dal verificarsi di sinistri nell'intervallo da 0 a T e dove il "deductible" è il capitale iniziale. Con questa soluzione il surplus intermedio può essere negativo e c'è poca speranza di ottenere un surplus positivo al tempo T. Tutto ciò è diverso per l'assicurazione di solvibilità dinamica, dove i pagamenti necessari sono forniti istantaneamente per evitare il surplus negativo. Di conseguenza c'è speranza di avere un surplus sostanzialmente positivo al tempo T.

Il secondo problema concerne la protezione di un fondo d'investimento. Se lo scopo consiste nel far valere l'investimento iniziale di f almeno K al tempo T, allora bisogna utilizzare un'opzione di vendita europea con prezzo d'esercizio K e scadenza T. Questa *soluzione statica* ha la caratteristica negativa seguente: se il fondo d'investimento non si sviluppa favorevolmente e di conseguenza l'opzione di vendita corrispondente risulta profondamente in the money, c'è poca speranza che l'investimento abbia valore superiore a K al tempo T. Questa situazione può essere evitata con la *protezione dinamica del fondo*: l'investitore è assicurato in ogni momento in cui il suo investimento avrà valore superiore a K al tempo T.

Evidentemente una protezione migliore ha un prezzo più elevato. Per un'illustrazione consideriamo un orizzonte d'investimento di $T = 1$ con $f = 100$,

Tabella 10. Confronto dei prezzi con $f = 100$, $T = 1$, $\sigma = 0.2$ e $r = 0.04$.

K	80	85	90	95	100
European put option	0.7693	1.4654	2.5315	4.0325	6.0040
Dynamic fund protection	1.7709	3.4239	6.0120	9.7476	14.7931
Ratio	2.30	2.34	2.37	2.42	2.46

Tabella 11. Rapporti dei prezzi con $f = 100$, $\sigma = 0.2$ e $r = 0.04$.

K	80	85	90	95	100
1/12	2.04	2.05	2.06	2.08	2.12
2/12	2.07	2.09	2.11	2.13	2.17
3/12	2.10	2.12	2.14	2.17	2.21
4/12	2.13	2.15	2.18	2.21	2.24
5/12	2.15	2.18	2.20	2.24	2.28
6/12	2.18	2.20	2.23	2.27	2.31
1	2.30	2.34	2.37	2.42	2.46
2	2.52	2.56	2.61	2.66	2.72
5	3.09	3.16	3.24	3.32	3.40
10	4.07	4.19	4.32	4.45	4.58
20	6.61	6.87	7.13	7.40	7.67

$\sigma = 0.2$ e $r = 0.04$. La Tabella 10 pone a confronto i prezzi della protezione statica con quelli della protezione dinamica. I prezzi di quest'ultima provengono dalla Tabella 11 e sono più del doppio dei prezzi della corrispondente opzione di vendita. Un confronto più esauriente è fornito dalla Tabella 11. Notiamo che il rapporto tra il prezzo della protezione dinamica di fondo e quello dell opzione di vendita europea corrispondente aumenta progressivamente con T. Osserviamo inoltre che il rapporto si avvicina al valore 2 per valori piccoli di T. Infatti, 2 è il limite per $T \to 0$ in generale. Per vedere ciò supponiamo che $f = K$. Applicando il Theorem 2 otteniamo

$$\begin{aligned} V(K,T) = & \frac{K}{R}\Phi\left(\frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}(R+1)\right) \\ & + K\left(1-\frac{1}{R}\right)e^{-rT}\Phi\left(-\frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}(R-1)\right) \\ & - K\Phi\left(-\frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}(R+1)\right). \end{aligned}$$

Usando lo sviluppo

$$\Phi(\varepsilon) = \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} + \dots \tag{31}$$

vediamo che

$$V(K,T) \sim K\frac{2\sigma\sqrt{T}}{\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{2}K\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \dots \qquad \text{for } T \to 0.$$

Il prezzo dell'opzione di vendita corrispondente è

$$P(K,T) = Ke^{-rT}\Phi\Big(-\frac{r}{\sigma}\sqrt{T}+\frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}\Big)$$
$$- K\Phi\Big(-\frac{r}{\sigma}\sqrt{T}-\frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}\Big).$$

Usando (31) deduciamo che

$$P(K,T) \sim K\frac{\sigma\sqrt{T}}{\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{2}KrT + \dots \qquad \text{for} \quad T \to 0.$$

Perciò

$$\lim_{T\to 0}\frac{V(K,T)}{P(K,T)} = 2.$$

Ora supponiamo che $f > K$. Sia $g(t)$, $t > 0$, la funzione di densità del primo istante in cui $F(t) = K$. Condizionatamente all'istante del primo passaggio vediamo che

$$V(f,T) = \int_0^T e^{-rt}V(K,T-t)g(t)dt,$$
$$P(f,T) = \int_0^T e^{-rt}P(K,T-t)g(t)dt.$$

Dunque

$$V(f,T) \sim K\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_0^T \sqrt{T-t}g(t)dt \qquad \text{for} \quad T \to 0,$$
$$P(f,T) \sim K\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_0^T \sqrt{T-t}g(t)dt \qquad \text{for} \quad T \to 0,$$

questo spiega perché $V(f,T)/P(f,T) \to 2$ per $T \to 0$.

Ringraziamenti

Gli autori sono grati al Professore Elias S.W. Shiu per i suoi commenti.

BIBLIOGRAFIA

[1] BAXTER M., RENNIE A., *Financial Calculus*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[2] COX D. R., MILLER H., *The Theory of Stochastic Processes*, Chapman & Hall, London, 1965. Reprinted in 1995.

[3] DOTHAN M., *Prices in Financial Markets*, Oxford University Press, Oxford, 1990.

[4] GERBER H. U., SHIU E. S. W., *Martingale approach to pricing perpetual American options on two stocks*, Mathematical Finance, 6, 1996, 303-322.

[5] GERBER H. U., SHIU E. S. W., *On the time value of ruin*, North American Actuarial Journal, 2(1), 1998a, 48-78.

[6] GERBER H. U., SHIU E. S. W., *Pricing perpetual options for jump processes*, North American Actuarial Journal, 2(3), 1998b, 101-112.

[7] GERBER H. U., SHIU E. S. W., *From ruin theory to pricing reset guarantees and perpetual put options*, To appear in Insurance: Mathematics and Economics, 1999.

[8] PANJER (editor) H., BOYLE P., COX S., DUFRESNE D., GERBER H., MÜLLER H. PEDERSEN H., PLISKA H., SHERRIS M., SHIU E., TAN K., *Financial Economics: with applications in investments, insurance and pensions*, The Actuarial Foundation, Schaumburg, Ill., 1998.

[9] SHEPP L., SHIRYAEV A. N., *The Russian option: Reduced regret*, The Annals of Applied Probability, 3 1993, 631-640.

Pricing dynamic solvency insurance and investment fund protection

SUMMARY

In the first part of the paper the surplus of a company is modelled by a Wiener process. We consider a dynamic solvency insurance contract. Under such a contract the necessary payments are made instantaneously so that the modified surplus never falls below zero. This means mathematically that the modified surplus process is obtained from the original surplus process by introduction of a reflecting barrier at zero. Theorem 1 gives an explicit expression for the net single premium of such a contract.

In the second part we consider an investment fund whose unit value is modelled by a geometric Brownian motion. Different forms of dynamic investment fund protection are examined. The basic form is a guarantee which provides instantaneously the necessary payments so that the upgraded fund unit value does not fall below a protected level. Theorem 2 gives an explicit expression for the price of such a guarantee. This result can also be applied to price a guarantee where the protected level is an exponential function of time. Moreover it is shown explicitly how the garantee can be generated by construction of the replicating portfolio. The dynamic investment fund garantee is compared to the corresponding put option and it is observed that for short time intervals the ratio of the prices is about 2. Finally the price of a more exotic protection is discussed, under which the guaranteed unit value at any time is a fixed fraction of the maximal upgraded unit value that has been observed until then. Several numerical and graphical illustrations show how the theoretical results can be implemented in practice.

Corresponding author:

HANS U. GERBER
École des Hautes Études Commerciales, Università di Losanna
CH-1015 Losanna, Svizzera
e-mail: hgerber@hec.unil.ch