IMRN International Mathematics Research Notices
Volume 2006, Article ID 16834, Pages 1–31

Valeurs algébriques de fonctions transcendantes

Andrea Surroca

On étudie l'ensemble des nombres algébriques de hauteur et de degré bornés où une fonction analytique transcendante prend des valeurs algébriques.

1 Introduction

Étant donnée une fonction f analytique, on considère l'ensemble S_f des points algébriques en lesquels la fonction f prend des valeurs algébriques. Ici, la fonction f sera transcendante sur $\mathbf{C}(z)$, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de polynôme non nul en deux variables et à coefficients complexes, s'annulant sur tous les points $(z, f(z))$ pour les z où f est définie.

Par exemple, d'après le théorème de Hermite-Lindemann ([22, théorème 1.2]), la fonction exponentielle prend des valeurs transcendantes en tout point algébrique, sauf en 0. Donc pour $f(z) = e^z$, on a $S_f = \{0\}$. Par la même raison, si on pose $f(z) = e^{P(z)}$ où $P \in \overline{\mathbf{Q}}[X]$, alors S_f est l'ensemble des zéros de P. En supposant vraie la conjecture de Schanuel ([6, page 30] ou [22]), pour $f(z) = \sin(\pi z)e^z$ on a $S_f = \mathbf{Z}$. Le théorème de Gel'fond-Schneider ([22, théorème 1.4]) nous fournit d'autres exemples : si $f(z) = e^{\lambda z}$ où $\lambda \neq 0$ est tel que e^λ soit algébrique (e.g., $f(z) = 2^z$ ou $f(z) = e^{i\pi z}$), alors $S_f = \mathbf{Q}$.

Dans une lettre de 1886 adressée à Strauss [18], Weierstrass suggérait l'existence de fonctions entières transcendantes prenant des valeurs algébriques en tous les points algébriques. Après un premier résultat de Strauss allant dans cette direction, Stäckel (cf. [4, 18]), énonce le théorème suivant.

Reçu le 14 août 2005 ; Révisé le 27 mai 2006 ; Accepté le 16 juillet 2006

Étant donnés un sous-ensemble Σ dénombrable de $\mathbf{C}$ et un sous-ensemble T dense de $\mathbf{C}$, il existe une fonction entière transcendante envoyant Σ dans T.

En prenant $\Sigma = T = \overline{\mathbf{Q}}$, on obtient une fonction f entière et transcendante pour laquelle l'ensemble S_f est $\overline{\mathbf{Q}}$ tout entier. Par ailleurs, on en déduit, en posant $\Sigma = \overline{\mathbf{Q}}$ et $T = \mathbf{C} \backslash \overline{\mathbf{Q}}$, l'existence d'une fonction entière transcendante prenant des valeurs transcendantes en tous les points algébriques, c'est-à-dire, telle que $S_f = \varnothing$. (Sous la conjecture de Schanuel, on peut montrer que pour la fonction $f(z) = e^{e^z}$ on a $S_f = \varnothing$.)

Gramain remarque dans [4], que si Σ est contenu dans $\mathbf{R}$, la même démonstration s'applique avec T dense dans $\mathbf{R}$. Ceci nous permet de prendre $\Sigma = K$, corps de nombres réel, ou $\Sigma = O_{K,S}$ l'anneau des S-entiers d'un corps de nombres K réel, et, dans les deux cas, $T = \mathbf{Z}[1/n]$, pour n'importe quel entier naturel $n \geq 2$.

En suivant une remarque de Stäckel, qui construit [19] une fonction algébrique qui prend, ainsi que toutes ses dérivées, des valeurs algébriques en tous les points algébriques, Faber [3] construit une fonction G entière et transcendante telle que, pour tout nombre entier k et tout $\alpha \in \overline{\mathbf{Q}}$, la valeur de la fonction dérivée $G^{(k)}$ en α est dans $\mathbf{Q} + i\mathbf{Q}$.

Dans la section 5, nous construisons une fonction f entière et transcendante (théorème 1.2), dont toutes ses dérivées, envoient tout corps de nombres dans lui-même (cf. aussi [21]), et pour laquelle on contrôle la hauteur des valeurs prises aux points algébriques. On construit aussi (théorème 5.4) une fonction g entière et transcendante, dont toutes ses dérivées, envoient tout nombre algébrique α dans $\mathbf{Z}[1/2, \alpha]$.

Afin d'étudier l'ensemble S_f, filtrons l'ensemble dénombrable des nombres algébriques par le degré et la hauteur *logarithmique* absolue (dont la définition précise est rappelée dans la section 2) : pour D entier ≥ 1 et N nombre réel ≥ 0, l'ensemble

$$E_{D,N} = \left\{\alpha \in \overline{\mathbf{Q}};\ \left[\mathbf{Q}(\alpha) : \mathbf{Q}\right] \leq D,\ h(\alpha) \leq N\right\} \tag{1.1}$$

est fini et son cardinal $\epsilon_{D,N}$ vérifie l'encadrement suivant.

Lemme 1.1 (encadrement du cardinal de $E_{D,N}$)**.** Pour tout entier $D \geq 1$ et tout nombre réel $N \geq 0$, le cardinal $\epsilon_{D,N}$ de $E_{D,N}$ vérifie

$$e^{D(D+1)(N-1)} < \epsilon_{D,N} \leq e^{D(D+1)(N+1)}. \tag{1.2}$$

□

Dans ce texte, nous fixons une fonction f transcendante et nous nous intéressons à l'ensemble des α dans $E_{D,N}$ tels que $f(\alpha)$ appartienne à $E_{D,N}$.

Le problème sera local. Pour tout couple de nombres réels (R, r) vérifiant $R > r > 0$, pour toute fonction f analytique sur $D(0, R)$ et à valeurs complexes, pour tout entier

$D \geq 1$ et tout nombre réel $N \geq 0$, on note $\Sigma_{D,N} = \Sigma_{D,N}(f, r)$ l'ensemble des nombres α dans $\overline{\mathbf{Q}} \cap \overline{D(0, r)}$ tels que

$$f(\alpha) \in \overline{\mathbf{Q}}, \quad \big[\mathbf{Q}\big(\alpha, f(\alpha)\big) : \mathbf{Q}\big] \leq D, \quad h(\alpha) \leq N, \quad h\big(f(\alpha)\big) \leq N. \tag{1.3}$$

Ainsi, S_f est la réunion des $\Sigma_{D,N}$ pour $D \geq 1$ et $N \geq 0$.

Dans le cas $D = 1$, Pila ([**12**, théorème 9]) et Elkies ([**2**, théorème 4]) obtiennent le résultat suivant. *Soit* f *une fonction réelle analytique sur un intervalle fermé*, *dont l'image n'est pas contenue dans aucune courbe algébrique. Pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe une constante* $c(f, \varepsilon)$ *telle que pour tout* $N \geq 1$, *le nombre de points rationnels du graphe de* f *de hauteur inférieure à* N, *est inférieur à*

$$c(f, \varepsilon)e^{\varepsilon N}. \tag{1.4}$$

Le résultat suivant montre, en particulier, que la borne du théorème de J. Pila et de N. Elkies n'est pas loin d'être optimale.

Théorème 1.2. Soit ϕ une fonction positive telle que $\phi(x)/x$ tende vers 0 quand x tend vers l'infini. Il existe une suite $(N_\delta)_{\delta \geq 1}$ de nombres réels, croissant vers l'infini, et une fonction f entière et transcendante sur $\mathbf{C}(z)$, vérifiant

$$\forall \alpha \in \overline{\mathbf{Q}}, \quad \forall \sigma \geq 0, \quad f^{(\sigma)}(\alpha) \in \mathbf{Q}(\alpha), \tag{1.5}$$

et telle que, pour tout entier $D \geq 1$, pour tout $k \geq D$,

$$\operatorname{card}\big(\Sigma_{D,N_k}(f, 1)\big) \geq e^{D(D+1)\phi(N_k) - \log 2}. \tag{1.6}$$

□

D'autre part, avec les méthodes classiques de transcendance, nous obtenons le résultat suivant.

Théorème 1.3 (majoration du cardinal de $\Sigma_{D,N}(f, r)$)**.** Soient R et r deux nombres réels vérifiant $R > r > 0$, $c_0 = \log((R^2 + r^2)/2rR)$ et δ un nombre réel tel que $\delta > 2(6/c_0)^2$. Soit f une fonction analytique sur $D(0, R)$, continue sur $\overline{D(0, R)}$ et transcendante sur $\mathbf{C}(z)$.

(i) Pour tout entier $D \geq 1$, il existe une suite de nombres réels $N \geq 0$ tendant vers l'infini pour lesquels

$$\operatorname{card}\big(\Sigma_{D,N}\big) < \delta D^3 N^2. \tag{1.7}$$

(ii) Pour tout nombre réel $N > 0$, il existe une suite de nombres entiers $D \geq 2$ tendant vers l'infini pour lesquels

$$\operatorname{card}\left(\Sigma_{D,N}\right) < \delta D^3 N^2. \tag{1.8}$$

□

Les nombres réels c_0 et δ sont strictement positifs et dépendent uniquement de r et R.

Pour D et N fixés, l'ensemble $\Sigma_{D,N}$ est fini, puisqu'il est contenu dans l'ensemble $E_{D,N}$. Le théorème 1.3 montre d'une part que, pour D fixé et une infinité d'entiers N, le cardinal de $\Sigma_{D,N}$ est beaucoup plus petit que $\epsilon_{D,N}$; et, d'autre part que, pour N fixé et une infinité d'entiers D, la même conclusion est valable.

Le théorème 1.2 montre qu'on ne peut pas remplacer, dans la partie (i) du théorème 1.3, ≪il existe une suite de nombres réels $N \geq 0$ tendant vers l'infini≫ par ≪pour tout N assez grand.≫ De même, la partie (i) du théorème 1.3 montre qu'on ne peut pas remplacer, dans le théorème 1.2, la suite N_k par ≪pour tout N assez grand.≫

Le résultat principal de ce travail, le théorème 3.1, généralise le théorème 1.3 au cas de plusieurs fonctions analytiques algébriquement indépendantes.

Dans le cas des fonctions réelles, Pila ([12, théorème 8]) obtient un résultat uniforme à la fois en la borne du degré du corps de nombres et en la borne de la hauteur. Cependant, la dépendance en le degré n'est pas explicite. On peut déduire de son résultat le corollaire suivant. *Soit* f *une fonction analytique sur l'intervalle réel* $[-r, r]$. *Soient* d *un entier naturel non nul et* $\varepsilon > 0$ *un nombre réel. Il existe un nombre réel* $c(f, d, \varepsilon)$ *tel que, pour tout corps de nombres* K *de degré* $[K : \mathbf{Q}] = d$ *et tout réel* $N > 0$, *le cardinal de l'ensemble des* x *dans* $[-r, r] \cap K$ *tels que* $f(x) \in K$, $h(x) \leq N$ *et* $h(f(x)) \leq N$, *est inférieur à*

$$c(f, d, \varepsilon) e^{\varepsilon d N}. \tag{1.9}$$

D'autres résultats sur le cas rationnel, concernant des fonctions réelles, ainsi que des généralisations, ont été obtenus par Pila, Bombieri et Pila, et par Pila et Wilkie. Les méthodes remontent, en partie, à celles de [1]. Le plus récent, [13], qui porte sur des situations multidimensionnelles, fait intervenir la théorie de la o-minimalité.

Cet article est organisé de la façon suivante. On introduit les notations employées dans la section 2. Dans la section 3, on énonce et on démontre le théorème 3.1 qui concerne le nombre de points algébriques où prennent des valeurs algébriques plusieurs fonctions analytiques algébriquement indépendantes. Le théorème 1.3 s'en déduit. Dans la section 4 on compte le nombre de points algébriques de hauteur et de degré bornés ; il s'agit du lemme 1.1. On y fait référence à d'autres résultats sur le sujet. La construction explicite de la fonction dont l'existence est assurée dans le théorème 1.2 est donnée dans la section 5 ; on y donne aussi la construction d'une autre fonction transcendante g envoyant tout nombre algébrique α dans $\mathbf{Z}[1/2, \alpha]$.

Le lemme 1.1, le théorème 1.2 et la partie (i) du théorème 1.3 ont fait l'objet d'une annonce dans [20]. Les détails de leurs preuves sont donnés ici.

2 Notations

Pour un corps de nombres K, on note M_K l'ensemble de classes d'équivalence de ces valeurs absolues dont la restriction à $\mathbf{Q}$ est, soit la valeur absolue archimédienne $|\cdot|_\infty$, soit une des valeurs absolues ultramétriques, normalisées de la façon suivante :

$$\begin{aligned} |x|_\infty &= x, \quad \text{si } x \in \mathbf{Q},\ x > 0, \\ |p|_p &= \frac{1}{p}, \quad \text{si } p \text{ est un nombre premier.} \end{aligned} \tag{2.1}$$

La formule du produit pour un élément non nul x de K s'écrit alors $\prod_{v \in M_K} |x|_v^{d_v} = 1$, où d_v est le degré local en la place v.

Si α est un nombre algébrique et K un corps de nombres le contenant, on définit sa hauteur projective logarithmique absolue par

$$h(\alpha) = \frac{1}{[K:\mathbf{Q}]} \sum_{v \in M_K} d_v \log \max\left\{1, |\alpha|_v\right\}. \tag{2.2}$$

Si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont n nombres algébriques, on a (cf. [22, Chapitre 3]) les inégalités suivantes :

$$h(\alpha_1\alpha_2) \le h(\alpha_1) + h(\alpha_2), \tag{2.3}$$

$$h(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n) \le h(\alpha_1) + \cdots + h(\alpha_n) + \log n. \tag{2.4}$$

Si $a_0X^d + a_1X_{d-1} + \cdots + a_d$ est le polynôme minimal sur $\mathbf{Z}$ de α (où $d = [\mathbf{Q}(\alpha) : \mathbf{Q}]$) et $\alpha_1 = \alpha, \dots, \alpha_d$ ses conjugués, on définit la mesure de Mahler de α par

$$M(\alpha) = |a_0| \prod_{i=1}^{d} \max\left\{1, |\alpha_i|\right\}. \tag{2.5}$$

Elle est reliée à la hauteur logarithmique absolue par la relation ([22, Lemma 3.10])

$$h(\alpha) = \frac{1}{d} \log M(\alpha). \tag{2.6}$$

La hauteur usuelle d'un polynôme $P \in \mathbf{C}[X]$ est, par définition, le maximum du module de ses coefficients. La hauteur usuelle d'un nombre algébrique α est définie comme étant la hauteur usuelle de son polynôme minimal, à savoir (en gardant les mêmes notations),

$$\mathcal{H}(\alpha) = \max\left\{|a_0|, \ldots, |a_d|\right\}. \tag{2.7}$$

La hauteur usuelle est liée à la hauteur logarithmique absolue par la double inégalité suivante ([22, Chapitre 3, lemme 3.11]) :

$$\frac{1}{d}\log \mathcal{H}(\alpha) - \log 2 \leq h(\alpha) \leq \frac{1}{d}\log \mathcal{H}(\alpha) + \frac{1}{2d}\log(d+1). \tag{2.8}$$

Au lieu de la première inégalité, nous utiliserons plutôt celle-ci :

$$\frac{1}{d}\log \mathcal{H}(\alpha) - \frac{d-1}{d}\log 2 \leq h(\alpha), \tag{2.9}$$

obtenue de la même façon que la première, en remarquant que les coefficients binômiaux sont majorés par 2^{d-1}.

Pour un polynôme $P \in \mathbf{C}[X, Y]$ on note $L(P)$ sa longueur. C'est la somme des modules de ses coefficients.

Pour un nombre réel $\rho > 0$ et une fonction F continue dans le disque fermé $\overline{D(0, \rho)}$, on note

$$|F|_\rho = \max_{|z| \leq \rho} |F(z)|. \tag{2.10}$$

Pour $x \in \mathbf{R}$, $[x]$ désigne la partie entière de x. Elle vérifie $[x] \in \mathbf{Z}$ et $0 \leq x - [x] < 1$.

3 Le théorème principal

Pour des nombres réels R, r et c_0 comme dans le théorème 1.3 et un entier $t \geq 2$, on note

$$\gamma_t = \max_{2 \leq \tau \leq t} \left(\frac{1}{2}\left(\frac{c_0}{3\tau}\right)^{\tau}\right)^{-1/(\tau-1)}. \tag{3.1}$$

Ainsi γ_t ne dépend que de R, r et t.

Pour $f_1, \dots, f_t$ des fonctions analytiques sur $D(0,R)$, pour tout entier $D \geq 1$ et tout nombre réel $N \geq 0$, on considère l'ensemble $\Sigma_{D,N}(f_1, \dots, f_t, r)$ des nombres $w \in \mathbf{C} \cap \overline{D(0,r)}$ tels que,

$$\begin{aligned} &\forall i \in \{1, \dots, t\}, \quad f_i(w) \in \overline{\mathbf{Q}}, \quad h\big(f_i(w)\big) \leq N, \\ &\big[\mathbf{Q}\big(f_1(w), \dots, f_t(w)\big) : \mathbf{Q}\big] \leq D. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Théorème 3.1 (majoration du cardinal de $\Sigma_{D,N}(f_1, \dots, f_t, r)$)**.** Soient R et r des nombres réels vérifiant $R > r > 0$ et $c_0 = \log((R^2 + r^2)/2rR)$. Soient t un entier ≥ 2 et γ une constante réelle telle que $\gamma > \gamma_t$.

Soient $f_1, \dots, f_t$ des fonctions analytiques sur $D(0,R)$ et continues sur $\overline{D(0,R)}$, algébriquement indépendantes sur $\mathbf{Q}$.

(i) Pour tout entier $D \geq 1$, il existe une infinité de nombres réels $N \geq 0$ arbitrairement grands pour lesquels

$$\operatorname{card}\big(\Sigma_{D,N}\big(f_1, \dots, f_t, r\big)\big) < \gamma D^{a(t)} N^{b(t)}. \tag{3.3}$$

(ii) Pour tout nombre réel $N > 0$, il existe une infinité de nombres entiers $D \geq 2$ arbitrairement grands pour lesquels

$$\operatorname{card}\big(\Sigma_{D,N}\big(f_1, \dots, f_t, r\big)\big) < \gamma D^{a(t)} N^{b(t)}, \tag{3.4}$$

où $a(t) = (t+1)/(t-1)$ et $b(t) = t/(t-1)$. □

Notons que pour $t \geq 2$, on a $a(t) \leq 3$ et $b(t) \leq 2$.

Remarque 3.2. Si $t = 2$, alors $a(t) = 3$ et $b(t) = 2$. Alors en prenant pour une des deux fonctions l'identité, l'autre fonction est transcendante, et nous retrouvons le théorème 1.3.

Dans la partie qui suit nous démontrons l'assertion (i) du théorème 3.1. L'assertion (ii) sera démontré de façon analogue, dans la section 3.2.

3.1 Le résultat uniforme en la borne du degré

La démonstration peut se faire par l'absurde. Voici le schéma de démonstration.

On suppose qu'il existe un entier $D \geq 1$ et un entier $N_0 \geq 1$ suffisamment grand tels que, pour tout $N \geq N_0$, on ait

$$\operatorname{card}\big(\Sigma_{D,N}\big(f_1, \dots, f_t\big)\big) \geq \gamma D^{a(t)} N^{b(t)}. \tag{3.5}$$

Pour tout $N \geq N_0$, on commence par extraire de $\Sigma_{D,N}$ un sous-ensemble convenable $S_{D,N}$ dont on connaît exactement le nombre d'éléments.

Le lemme de Siegel nous donne ensuite l'existence d'un polynôme P, non nul, à t variables et à coefficients entiers (et dépendant de N_0), tel que

$$P\big(f_1(\omega), \dots, f_t(\omega)\big) = 0, \quad \forall \omega \in S_{D,N_0}. \tag{3.6}$$

On définit alors une fonction F sur le disque $\overline{D(0,R)}$ en posant

$$F(z) = P\big(f_1(z), \dots, f_t(z)\big), \quad \forall z \in \overline{D(0,R)}. \tag{3.7}$$

Ainsi la construction de P entraîne

$$F(\omega) = 0, \quad \forall \omega \in S_{D,N_0}. \tag{3.8}$$

On montrera, grâce à une récurrence, à l'inégalité de Liouville et à un lemme de Schwarz, qu'on a

$$F(\omega) = 0, \quad \forall \omega \in \bigcup_{N \geq N_0} S_{D,N}, \tag{3.9}$$

ce qui impliquera que F est la fonction nulle et contredira le fait que les fonctions $f_1, \dots, f_t$ sont algébriquement indépendantes. D'où le résultat.

Dans cette section, nous noterons $\Sigma_{D,N}$ l'ensemble $\Sigma_{D,N}(f_1, \dots, f_t, r)$ et $\sigma_{D,N}$ son cardinal.

3.1.1 Choix des paramètres et construction de $S_{D,N}$. On fixe un entier $D \geq 1$ et un nombre réel $\gamma > \gamma_t$ et on suppose qu'il existe un nombre réel N_0 tel que, pour tout $N \geq N_0$,

$$\sigma_{D,N} \geq \gamma D^{a(t)} N^{b(t)}. \tag{3.10}$$

On pose $T = [(c_0\gamma/3t) D^{2/(t-1)} N_0^{1/(t-1)}]$. Comme $b(t) = t/(t-1)$, quitte à augmenter N_0, on a

$$c_0 \Big[\gamma D^{a(t)} \big(N_0 - 1\big)^{b(t)}\Big] > D \log 2 + 2tD \log T + T \left(2tN_0 D + \sum_{i=1}^{t} \log \max\big\{1, |f_i|_R\big\}\right). \tag{3.11}$$

On pose $u_1 = \log(2T^{2t}e^{tN_0T}\max\{1,|f_1|_R^T\},\dots,\max\{1,|f_t|_R^T\})$. L'inégalité (3.11) s'écrit alors

$$c_0\left[\gamma D^{a(t)}\left(N_0-1\right)^{b(t)}\right] > u_1 + (D-1)\log\left(2T^{2t}\right) + tTN_0(D-1) + tTN_0D. \tag{3.12}$$

Puisque pour tout N, supérieur ou égal à N_0, le cardinal $\sigma_{D,N}$ de l'ensemble $\Sigma_{D,N}$ est supérieur ou égal à $\gamma D^{a(t)}N^{b(t)}$, on peut extraire de $\Sigma_{D,N}$ un sous-ensemble $S_{D,N}$ dont le cardinal $s_{D,N}$ est exactement $[\gamma D^{a(t)}N^{b(t)}]$.

Pour $N \geq N_0$, on numérote les éléments de $S_{D,N} = \{\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_{s_{D,N}}\}$. Comme les nombres D et N_0 sont fixés pour toute la suite, on notera,

$$S_{D,N_0} = S_0, \qquad s_{D,N_0} = s_0. \tag{3.13}$$

3.1.2 *La fonction auxiliaire.*

Lemme 3.3. Il existe un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X_1,\dots,X_t]$, non nul, de degré en X_i strictement inférieur à T, pour tout $i \in \{1,\dots,t\}$, tel que

$$P\big(f_1(\omega),\dots,f_t(\omega)\big) = 0, \quad \forall \omega \in S_0 \tag{3.14}$$

et dont les coefficients sont majorés en valeur absolue par $2T^te^{tTN_0}$. □

Démonstration du lemme 3.3. On écrit le polynôme cherché sous la forme

$$P\big(X_1,\dots,X_t\big) = \sum_{i_1=0}^{T-1}\cdots\sum_{i_t=0}^{T-1} c_{i_1,\dots,i_t}X_1^{i_1}\dots X_t^{i_t}. \tag{3.15}$$

Montrons que

$$\sum_{i_1=0}^{T-1}\cdots\sum_{i_t=0}^{T-1} c_{i_1,\dots,i_t}f_1\left(\omega_k\right)^{i_1}\dots f_t\left(\omega_k\right)^{i_t} = 0, \quad \forall k \in \left\{1,\dots,s_0\right\} \tag{3.16}$$

posséde une solution non triviale $c_{i_1,\dots,i_t}$ dans $\mathbb{Z}^{T^t}$. Pour ainsi faire, on applique [5, le lemme 1.1] en posant :

$$\begin{gathered}\tau = t, \qquad N_1 = \cdots = N_t = T, \qquad \mu = s_0, \qquad L = T^t, \\ \left\{\alpha_{h,1},\dots,\alpha_{h,\tau}\right\}_{h=1,\dots,\mu} = \left\{f_1\left(\omega_k\right),\dots,f_t\left(\omega_k\right)\right\}_{k=1,\dots,s_0},\end{gathered} \tag{3.17}$$

et, pour $k \in \{1,\dots,s_0\}$, $d_k = [\mathbf{Q}(f_1(\omega_k),\dots,f_t(\omega_k)) : \mathbf{Q}]$. Comme $\gamma > \gamma_t$, et $t \geq 2$, d'après (3.1), nous avons $2\gamma < (c_0\gamma/3t)^t$ et, quitte à augmenter N_0, T vérifie

$$2\gamma D^{2t/(t-1)}N_0^{t/(t-1)} < T^t \leq \left(\frac{c_0\gamma}{3t}\right)^t D^{2t/(t-1)}N_0^{t/(t-1)}. \tag{3.18}$$

Alors

$$\sum_{h=1}^{\mu} d_h = \sum_{k=1}^{s_0} d_k \leq s_0 D \leq \gamma D^{2t/(t-1)} N_0^{t/(t-1)} < T^t, \tag{3.19}$$

et l'hypothèse $L > \sum_{h=1}^{\mu} d_h$ est satisfaite.

Le système possède donc une solution $c = (c_{i_1,\dots,i_t})_{0 \leq i_1,\dots,i_t \leq T-1}$, où les $c_{i_1,\dots,i_t}$ sont des entiers rationnels non tous nuls qui vérifient

$$\max_{0 \leq i_1,\dots,i_t \leq T-1} \left| c_{i_1,\dots,i_t} \right| \leq \left[\left(2^{s_0} \prod_{k=1}^{s_0} M_k \right)^{1/(T^t - s_0 D)} \right] \tag{3.20}$$

où $M_k = T^{t d_k} \prod_{r=1}^{t} H(f_r(\omega_k))^{(T-1)d_k}$. Comme pour tout $k \in \{1, \dots, s_0\}$ on a $d_k \leq D$ et $\omega_k \in S_{D,N_0}$, alors pour tout $r \in \{1, \dots, t\}$, on a $H(f_r(\omega_k)) \leq e^{N_0}$. D'où

$$M_k \leq T^{tD} e^{tN_0(T-1)D} \tag{3.21}$$

et $\max_{0 \leq i_1,\dots,i_t \leq T-1} |c_{i_1,\dots,i_t}| \leq (2^{s_0} T^{tDs_0} e^{tN_0 TDs_0})^{1/(T^t - s_0 D)}$. Or $D \geq 1,\ s_0 \geq 1$ et, d'après (3.18), on a $T^t > 2s_0 D$, ce qui conduit à la majoration

$$\max_{0 \leq i_1, i_t \leq T-1} \left| c_{i_1,\dots,i_t} \right| \leq 2T^t e^{tTN_0} \tag{3.22}$$

et démontre le lemme. ■

On définit une fonction F continue sur le disque fermé $\overline{D(0,R)}$, en posant

$$F(z) = P\big(f_1(z), \dots, f_t(z)\big), \quad \forall z \in \overline{D(0,R)}. \tag{3.23}$$

3.1.3 La récurrence. On va montrer, par récurrence, que

$$\forall N \geq N_0, \quad \forall \omega \in S_{D,N}, \quad F(\omega) = 0. \tag{3.24}$$

Par construction du polynôme P, on a $F(\omega) = 0$ pour tout ω appartenant à S_{D,N_0}, et les deux lemmes suivants permettront de conclure.

Lemme 3.4. Pour tout $N \geq N_0$, on a

$$\big[\forall \omega \in S_{D,N},\ F(\omega) = 0\big] \Longrightarrow \big[\forall \omega \in S_{D,N+1},\ \left|F(\omega)\right| \leq e^{u_1 - c_0 s_{D,N}}\big]. \tag{3.25}$$

□

Lemme 3.5. Pour tout $N \geq N_0 + 1$ et tout $\omega \in S_{D,N}$, on a

$$\big|F(\omega)\big| \leq e^{u_1 - c_0 s_{D,N-1}} \Longrightarrow F(\omega) = 0. \tag{3.26}$$

□

Démonstration du lemme 3.4. On se donne $N \geq N_0$ et on suppose que $F(\omega) = 0$ pour tout $\omega \in S_{D,N}$. Nous appliquons un lemme de Schwarz (cf. [22, exercice 4.3]) à la fonction F, continue sur $\overline{D(0,R)}$, holomorphe sur $D(0,R)$, s'annulant sur chaque point $\zeta_i = \omega_i$ du disque $\overline{D(0,R)}$ avec une multiplicité $\geq \sigma_i = 1$. On obtient

$$|F|_r \leq |F|_R \prod_{k=1}^{s_{D,N}} \left(\frac{R^2 + r|\omega_k|}{R\big(r + |\omega_k|\big)} \right)^{-1}. \tag{3.27}$$

Or $(R^2 + r|\omega_k|)/(R(r + |\omega_k|)) - (R^2 + r^2)/2rR = (R^2 - r^2)(r - |\omega_k|)/2rR(r + |\omega_k|) \geq 0$ dès que $|\omega_k| \leq r$, donc, pour $\omega_k \in S_{D,N}$ on a

$$\frac{R^2 + r|\omega_k|}{R\big(r + |\omega_k|\big)} \geq \frac{R^2 + r^2}{2rR}, \tag{3.28}$$

et comme $c_0 = \log((R^2 + r^2)/2rR)$, on a $|F|_r \leq |F|_R e^{-c_0 s_{D,N}}$. De plus, pour tout z dans $\overline{D(0,R)}$, on a

$$F(z) = P\big(f_1(z), \dots, f_t(z)\big) = \sum_{i_1=0}^{T-1} \cdots \sum_{i_t=0}^{T-1} c_{i_1,\dots,i_t} f_1(z)^{i_1}, \dots, f_t(z)^{i_t}. \tag{3.29}$$

On peut donc majorer le module de $F(z)$ en s'aidant de la borne obtenue pour les coefficients $c_{i_1,\dots,i_t}$ au lemme 3.3 :

$$\begin{aligned} \big|F(z)\big| &\leq T^t \max_{0 \leq i_1,\dots,i_t \leq T-1} \big\{\big|c_{i_1,\dots,i_t}\big|\big\} \max\big\{1, \big|f_1\big|_R^T\big\}, \dots, \max\big\{1, \big|f_t\big|_R^T\big\} \\ &\leq 2T^{2t} e^{tTN_0} \max\big\{1, \big|f_1\big|_R^T\big\}, \dots, \max\big\{1, \big|f_t\big|_R^T\big\}. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Comme $u_1 = \log(2T^{2t} e^{tTN_0} |f_1|_R^T, \dots, |f_t|_R^T)$, alors $|F|_R \leq e^{u_1}$ et

$$\max_{|z| \leq r} \big|F(z)\big| = |F|_r \leq e^{u_1 - c_0 s_{D,N}}. \tag{3.31}$$

En particulier, tout $\omega \in S_{D,N+1}$ est de module $\leq r$, donc $|F(\omega)| \leq e^{u_1 - c_0 s_{D,N}}$, ce qui démontre le lemme 3.4. ■

Démonstration du lemme 3.5. On se donne $N \geq N_0 + 1$, ω dans $S_{D,N}$, et on suppose que $|F(\omega)| \leq e^{u_1 - c_0 s_{N-1}}$.

Comme $s_{D,N-1} = [\gamma D^{a(t)}(N-1)^{b(t)}]$, et qu' à la section 3.1.1 nous avons supposé que N_0 vérifiait (3.12), alors N vérifie

$$c_0 s_{D,N-1} > u_1 + (D-1)\log\left(2T^{2t}\right) + tTN_0(D-1) + tTND. \tag{3.32}$$

D'autre part, le lemme 3.3 nous a donné un majorant pour la longueur du polynôme P, à savoir,

$$L(P) = \sum_{i_1=1}^{T-1} \cdots \sum_{i_t=1}^{T-1} \left|c_{i_1,\dots,i_t}\right| \le T^t \max_{0\le i_1,\dots,i_t\le T-1} \left\{\left|c_{i_1,\dots,i_t}\right|\right\} \le 2T^{2t} e^{tTN_0}, \tag{3.33}$$

et comme ω appartient à $S_{D,N}$, on a $H(f_r(\omega)) \le e^N$, pour tout r dans $\{1,\dots,t\}$. Donc l'inégalité (3.32) donne

$$e^{u_1 - c_0 s_{D,N-1}} < L(P)^{-(D-1)} \prod_{r=1}^{t} H\big(f_r(\omega)\big)^{-DT}. \tag{3.34}$$

D'après l'hypothèse, on en déduit

$$\left|F(\omega)\right| < L(P)^{-(D-1)} \prod_{r=1}^{t} H\big(f_r(\omega)\big)^{-DT}. \tag{3.35}$$

Pour conclure que $F(\omega) = 0$, nous appliquons l'inégalité de Liouville ([22, Proposition 3.14]), ou plutôt sa contraposée, en posant

$$\begin{aligned} &K = \mathbf{Q}\big(f_1(\omega),\dots,f_t(\omega)\big), \quad \text{corps de nombres de degré } \le D, \qquad |\cdot|_v = |\cdot|,\\ &l = t, \quad N_1 = \cdots = N_t = T, \quad \gamma = \big(f_1(\omega),\dots,f_t(\omega)\big), \quad f = P. \end{aligned} \tag{3.36}$$

On en conclut que $P(f_1(\omega),\dots,f_t(\omega)) = 0$, c'est-à-dire, $F(\omega) = 0$, ce qui démontre le lemme 3.5 et donc la récurrence. ■

3.1.4 Conclusion. Nous avons montré que pour tout $N \ge N_0$, la fonction F s'annule sur l'ensemble $S_{D,N}$ et donc

$$F(\omega) = 0, \quad \forall \omega \in \bigcup_{N\ge N_0} S_{D,N}. \tag{3.37}$$

Les ensembles $S_{D,N}$ sont tous inclus dans le compact $\overline{D(0,r)}$ et la fonction F est holomorphe sur l'ouvert $D(0,R)$ qui contient $\overline{D(0,r)}$. De plus, F n'est pas la fonction identiquement nulle car elle est définie comme étant la valeur de $P \in \mathbf{Z}[X_1,\dots,X_t]$ au point

$(f_1(z), \dots, f_t(z))$ où les f_i sont des fonctions algébriquement indépendantes sur $\mathbf{Q}$. Ainsi F ne peut pas s'annuler sur une infinité de points de $\overline{D(0,r)}$, et donc en particulier sur $\bigcup_{N \geq N_0} S_{D,N}$.

Ceci montre que (3.37) contredit le théorème sur les zéros isolés d'une fonction holomorphe et nous donne le résultat cherché.

3.2 Le résultat uniforme en la borne de la hauteur

L'assertion (ii) du théorème 3.1 se démontre de façon analogue à l'assertion (i).

3.2.1 Choix des paramètres et construction de S_{D',N_0}. On fixe un nombre réel N_0 et un nombre réel $\gamma > \gamma_t$ et on suppose qu'il existe un nombre entier D tel que, pour tout $D' \geq D$, on ait $\sigma_{D',N_0} \geq \gamma D'^{a(t)} N_0^{b(t)}$. On pose, comme auparavant, $T = [(c_0\gamma/3t) D^{2/(t-1)} N_0^{1/(t-1)}]$. Comme $a(t) = (t+1)/(t-1)$, quitte à augmenter D, on a

$$c_0\left[\gamma(D-1)^{a(t)} N_0^{b(t)}\right] > (D+1)\log\left(2T^{2t}\right) + 2tN_0T(D+1) + T\sum_{i=1}^{t} \log\max\left\{1, \left|f_i\right|_R\right\}. \tag{3.38}$$

On pose encore $u_1 = \log(2T^{2t} e^{tN_0T} \max\{1, |f_1|_R^T\}, \dots, \max\{1, |f_t|_R^T\})$. L'inégalité (3.38) s'écrit alors :

$$c_0\left[\gamma(D-1)^{a(t)} N_0^{b(t)}\right] > u_1 + D\log\left(2T^{2t}\right) + tN_0T(2D+1), \tag{3.39}$$

et vient remplacer l'inégalité (3.32) de la section 3.1.

Puisque pour tout D', supérieur ou égal à D, le cardinal σ_{D',N_0} de l'ensemble Σ_{D',N_0} est supérieur ou égal à $\gamma D'^{a(t)} N_0^{b(t)}$, on peut extraire de Σ_{D',N_0} un sous-ensemble S_{D',N_0} dont le cardinal s_{D',N_0} est exactement $[\gamma D'^{a(t)} N_0^{b(t)}]$.

Comme les nombres N_0 et D sont fixés pour toute la suite, on notera

$$S_{D,N_0} = S_0, \qquad s_{D,N_0} = s_0. \tag{3.40}$$

Pour $D' \geq D$, on notera $S_{D',N_0} = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{s_{D',N_0}}\}$.

3.2.2 La fonction auxiliaire. Le lemme 3.3 s'applique encore ici et on définit une fonction F continue sur le disque fermé $\overline{D(0,R)}$, en posant

$$F(z) = P\big(f_1(z), \dots, f_t(z)\big), \quad \forall z \in \overline{D(0,R)}. \tag{3.41}$$

3.2.3 La récurrence. On va montrer, par récurrence, que

$$\forall D' \geq D, \quad \forall \omega \in S_{D',N_0}, \quad F(\omega) = 0. \tag{3.42}$$

Par construction du polynôme P, on a $F(\omega) = 0$ pour tout ω dans S_{D,N_0}, et les deux lemmes suivants permettent de conclure.

Lemme 3.6. Pour tout $D' \geq D$, on a

$$\left[\forall \omega \in S_{D',N_0},\ F(\omega) = 0\right] \Longrightarrow \left[\forall \omega \in S_{D'+1,N_0},\ \left|F(\omega)\right| \leq e^{u_1 - c_0 s_{D',N_0}}\right]. \tag{3.43}$$

□

Lemme 3.7. Pour tout $D' \geq D$ et tout $\omega \in S_{D',N_0}$, on a

$$\left|F(\omega)\right| \leq e^{u_1 - c_0 s_{D'-1,N_0}} \Longrightarrow F(\omega) = 0. \tag{3.44}$$

□

Démonstration du lemme 3.6. Avec les notations choisies, la démonstration est la même que celle du lemme 3.4. ■

Démonstration du lemme 3.7. On se donne $D' \geq D + 1$, ω dans S_{D',N_0}, et on suppose que $|F(\omega)| \leq e^{u_1 - c_0 s_{D'-1,N_0}}$. Par rapport à la section 3.1, il faut remarquer qu'ici on a $[\mathbf{Q}(\omega) : \mathbf{Q}] \leq D'$ et $h(\omega) \leq N_0$.

Comme $s_{D'-1,N_0} = [\gamma(D'-1)^{a(t)} N_0^{b(t)}]$, et qu' à la section 3.2.1 nous avons supposé que D vérifiait (3.39), alors D' vérifie

$$c_0 s_{D'-1,N_0} > u_1 + D \log\left(2T^{2t}\right) + tTN_0(2D+1). \tag{3.45}$$

D'autre part, le lemme 3.3 nous a donné un majorant pour la longueur du polynôme P, à savoir, $L(P) \leq 2T^{2t} e^{tTN_0}$, et comme ω appartient à S_{D',N_0}, on a $H(f_r(\omega)) \leq e^{N_0}$, pour tout r dans $\{1, \ldots, t\}$, et donc l'inégalité (3.45) donne

$$e^{u_1 - c_0 s_{D'-1,N_0}} < L(P)^{-D} \prod_{r=1}^{t} H\big(f_r(\omega)\big)^{-(D+1)T}. \tag{3.46}$$

D'après l'hypothèse, on a donc

$$\left|F(\omega)\right| < L(P)^{-D} \prod_{r=1}^{t} H\big(f_r(\omega)\big)^{-(D+1)T}. \tag{3.47}$$

Pour conclure que $F(\omega) = 0$, nous appliquons la contraposée de l'inégalité de Liouville ([22, Proposition 3.14]), en posant

$$\begin{aligned}&K = \mathbf{Q}\big(f_1(\omega), \dots, f_t(\omega)\big), \quad \text{corps de nombres de degré } \le D+1, \qquad |\cdot|_v = |\cdot|,\\ &l = t, \quad N_1 = \cdots = N_t = T, \quad \gamma = \big(f_1(\omega), \dots, f_t(\omega)\big), \quad f = P.\end{aligned} \tag{3.48}$$

On en conclut que $P(f_1(\omega), \dots, f_t(\omega)) = 0$, c'est-à-dire, $F(\omega) = 0$, ce qui démontre le lemme 3.5 et donc la récurrence. ■

3.2.4 Conclusion. On conclut de la même façon que dans la section 3.1, à l'aide du théorème sur les zéros isolés d'une fonction holomorphe.

4 Estimation du cardinal de $E_{D,N}$

On rappelle que pour D entier ≥ 1 et N réel ≥ 0, on a noté $E_{D,N}$ l'ensemble des nombres algébriques de degré majoré par D et de hauteur logarithmique absolue majorée par N.

Pour estimer son cardinal $\epsilon_{D,N}$, nous considérons l'ensemble $A_{D,H}$ (H étant un nombre réel positif) des nombres algébriques de degré majoré par D et de hauteur usuelle majorée par H,

$$A_{D,H} = \big\{\alpha \in \overline{\mathbf{Q}};\ \big[\mathbf{Q}(\alpha) : \mathbf{Q}\big] \le D,\ \mathcal{H}(\alpha) \le H\big\}. \tag{4.1}$$

Pour tout entier naturel $d \ge 1$ nous considérons aussi l'ensemble $\mathcal{A}_{d,H}$ des nombres algébriques de degré exactement d et de hauteur usuelle majorée par H,

$$\mathcal{A}_{d,H} = \big\{\alpha \in \overline{\mathbf{Q}};\ \big[\mathbf{Q}(\alpha) : \mathbf{Q}\big] = d,\ \mathcal{H}(\alpha) \le H\big\}, \tag{4.2}$$

et l'ensemble $\mathcal{P}_{d,H}$ des polynômes à coefficients entiers, à une variable, non nuls, de degré exactement d, de hauteur usuelle majorée par H, irréductibles dans $\mathbf{Z}[X]$ (donc les coefficients sont premiers entre eux dans leur ensemble) et dont le coefficient dominant est positif. Un polynôme P de $\mathcal{P}_{d,H}$ s'écrit

$$P(X) = a_0X^d + a_1X^{d-1} + \cdots + a_d \tag{4.3}$$

avec $a_i \in \mathbf{Z}$, $|a_i| \le H$, $\forall i \in \{1, \dots, d\}$, $\mathrm{pgcd}(a_0, \dots, a_d) = 1$, $1 \le a_0 \le H$.

Pour tout élément α de $A_{D,H}$, il existe un entier $d \le D$, tel que α appartienne à $\mathcal{A}_{d,H}$, et tout α de $\mathcal{A}_{d,H}$ est un zéro d'un polynôme P de $\mathcal{P}_{d,H}$. (Les $d-1$ autres racines — distinctes — de P sont les conjugués de α.) Inversement, tout zéro d'un polynôme de $\mathcal{P}_{d,H}$

est un élément de $\mathcal{A}_{d,H}$. On remarque ainsi que l'ensemble $A_{D,H}$ est l'union disjointe des ensembles $\mathcal{A}_{d,H}$, pour $1 \leq d \leq D$. Donc

$$\operatorname{card}\left(A_{D,H}\right) = \sum_{d=1}^{D} \operatorname{card}\left(\mathcal{A}_{d,H}\right), \tag{4.4}$$

$$\operatorname{card}\left(\mathcal{A}_{d,H}\right) = d \operatorname{card}\left(\mathcal{P}_{d,H}\right), \quad \forall d \geq 1. \tag{4.5}$$

4.1 Estimation du cardinal de $A_{D,H}$

Lemme 4.1 (encadrement du cardinal de $A_{D,H}$)**.** Pour tout entier $D \geq 1$ et tout nombre réel $H \geq 1$, on a

$$\operatorname{card}\left(A_{D,H}\right) \leq DH(2H+1)^D; \tag{4.6}$$

pour tout entier $D \geq 2$ et tout nombre réel $H \geq 2$,

$$\frac{D}{8}(H-2)^{D+1} < \operatorname{card}\left(\mathcal{A}_{D,H}\right) \leq \operatorname{card}\left(A_{D,H}\right) \tag{4.7}$$

et pour $D = 1$ et tout nombre réel $H \geq 1$,

$$(H-1)^2 < \operatorname{card}\left(\mathcal{A}_{1,H}\right) = \operatorname{card}\left(A_{1,H}\right). \tag{4.8}$$

□

Nous allons maintenant démontrer le lemme 4.1.

4.1.1 Majoration de card$(A_{D,H})$. On fixe $D \geq 1$ et $H \geq 1$. Comme l'union $\bigcup_{1 \leq d \leq D} \mathcal{P}_{d,H}$ est disjointe, en utilisant (4.4) et (4.5), on a

$$\operatorname{card}\left(A_{D,H}\right) = \sum_{d=1}^{D} d \operatorname{card}\left(\mathcal{P}_{d,H}\right) \leq D \sum_{d=1}^{D} \operatorname{card}\left(\mathcal{P}_{d,H}\right) = D \operatorname{card}\left(\bigcup_{1 \leq d \leq D} \mathcal{P}_{d,H}\right). \tag{4.9}$$

Or le cardinal de $\bigcup_{1 \leq d \leq D} \mathcal{P}_{d,H}$ est inférieur au nombre de polynômes non nuls $Q \in \mathbf{Z}[X]$ qui s'écrivent

$$Q(X) = a_0 X^D + a_1 X^{D-1} + \cdots + a_D \tag{4.10}$$

avec $|a_i| \leq H$ pour tout $i \in \{1, \ldots, D\}$, de coefficient dominant a_0 strictement positif et inférieur ou égal à H. En effet, au polynôme $P(X) = a_0 X^d + \cdots + a_d$ de $\bigcup_{1 \leq d \leq D} \mathcal{P}_{d,H}$ on peut associer le polynôme $Q(X) = P(X) X^{D-d}$.

Comme il existe $[H]$ nombres entiers > 0 de valeur absolue inférieure ou égale à H, il y a autant de choix pour le coefficient dominant, et $2[H]+1$ pour les D autres coefficients (éventuellement nuls). On en déduit qu'il existe $[H](2[H]+1)^D$ tels polynômes Q, et

$$\operatorname{card}\left(A_{D,H}\right) \leq DH(2H+1)^D. \tag{4.11}$$

4.1.2 Minoration de card$(A_{D,H})$. Soient D un entier ≥ 1 et H un nombre réel ≥ 0. D'après (4.4), $\operatorname{card}(A_{D,H}) \geq \operatorname{card}(\mathcal{A}_{D,H})$, et d'après (4.5), pour minorer le cardinal de $A_{D,H}$, il suffit de minorer celui de $\mathcal{P}_{D,H}$.

Pour $D \geq 2$ et $H \geq 2$, au lieu de considérer l'ensemble $\mathcal{P}_{D,H}$, nous pouvons juste compter les polynômes P de $\mathcal{P}_{D,H}$ tels que $\operatorname{pgcd}(a_0, a_1) = 1$. La condition $\operatorname{pgcd}(a_0, \dots, a_D) = 1$ est alors automatiquement vérifiée. Parmi ces polynômes-là, nous pouvons encore nous restreindre à ceux qui vérifient le critère d'irréductibilité d'Eisenstein (cf. [7]) sur l'anneau des entiers $\mathbf{Z}$, pour le nombre premier 2. On rappelle que le polynôme P est 2-Eisenstein sur $\mathbf{Z}$ (et donc irréductible sur $\mathbf{Q}$), si

$$2 \nmid a_0, \quad 2 \mid a_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, D\}, \quad 4 \nmid a_D. \tag{4.12}$$

On note $\mathcal{E}_{D,H}(2)$ l'ensemble de ces polynômes P. Comme il est inclus dans $\mathcal{P}_{D,H}$, on a

$$\operatorname{card}\left(\mathcal{A}_{D,H}\right) \geq D \operatorname{card}\left(\mathcal{E}_{D,H}(2)\right) \tag{4.13}$$

et nous sommes ramenés à minorer le cardinal de $\mathcal{E}_{D,H}(2)$.

On a

$$\begin{aligned} &\operatorname{card}\left\{a \in \mathbf{Z}/|a| \leq H,\ 2 \mid a\right\} = 2\left[\frac{H}{2}\right] + 1 > H - 1, \\ &\operatorname{card}\left\{a \in \mathbf{Z}/|a| \leq H,\ 2 \mid a,\ 4 \nmid a\right\} = 2\left[\frac{H+2}{4}\right] > \frac{H-2}{2}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

En notant c_H le nombre de couples $(a_0, a_1) \in \mathbf{Z}^2$ tels que

$$1 \leq a_0 \leq H, \quad |a_1| \leq H, \quad 2 \mid a_1, \quad \operatorname{pgcd}\left(a_0, a_1\right) = 1, \tag{4.15}$$

nous obtenons

$$\operatorname{card}\left(\mathcal{E}_{D,H}(2)\right) = c_H \left(2\left[\frac{H}{2}\right] + 1\right)^{D-2} \left(2\left[\frac{H+2}{4}\right]\right), \tag{4.16}$$

et donc (comme $H \geq 2$), une minoration de ce cardinal, en fonction de c_H,

$$\operatorname{card}\left(\mathcal{E}_{D,H}(2)\right) > c_H(H-2)^{D-2}\binom{H-2}{2} = \frac{c_H}{2}(H-2)^{D-1}. \tag{4.17}$$

Il existe $[(H+1)/2]$ nombres impairs compris entre 1 et H, et $[H/2]$ nombres pairs compris entre 1 et H. En tenant compte du signe de a_1, cela implique que le cardinal de l'ensemble

$$\left\{\left(a_0, a_1\right) \in \mathbf{Z}^2/1 \leq a_0 \leq H,\ 0 < \left|a_1\right| \leq H,\ 2 \nmid a_0,\ 2 \mid a_1\right\} \tag{4.18}$$

est égal à $2[(H+1)/2][H/2]$, et nous avons $2[(H+1)/2][H/2] \geq H(H-2)/2$ (voir les deux cas, pour n entier positif, $2n \leq H < 2n+1$ et $2n+1 \leq H < 2n+2$).

Pour minorer c_H, on tient compte du couple $(1,0)$ et on enlève tous les couples (a_0, a_1) dont le pgcd est divisible par un nombre premier p (on a donc $p \geq 3$ car $2 \nmid a_0$). Ici, p désignera toujours un nombre premier. Or, pour un nombre premier $p \geq 3$, on a

$$\operatorname{card}\left\{a \in \mathbf{Z}/1 \leq a \leq H,\ 2 \nmid a,\ p \mid a\right\} \leq \operatorname{card}\left\{a \in \mathbf{Z}/1 \leq a \leq H,\ p \mid a\right\} = \left[\frac{H}{p}\right] \tag{4.19}$$

et $\operatorname{card}\{a \in \mathbf{Z}\setminus\{0\}/|a| \leq H,\ 2 \mid a,\ p \mid a\}$ est égal au nombre de $a \in \mathbf{Z}\setminus\{0\}$ tels que $|a| \leq H$ et $2p \mid a$, c'est-à-dire $2[H/2p]$ d'où,

$$c_H \geq 1 + \frac{H(H-2)}{2} - \sum_{p\geq 3} 2\left[\frac{H}{p}\right]\left[\frac{H}{2p}\right] \geq 1 + \frac{H(H-2)}{2} - H^2\sum_{p\geq 3}\frac{1}{p^2}. \tag{4.20}$$

Comme, pour tout nombre $x \in [0,1[$, on a $-\log(1-x) = \sum_{k\geq 1}(x^k/k) \geq x$, et que, d'une part, $\zeta(2) = \sum_{k\geq 1}(1/k^2) = \prod_{p\geq 2}(1/(1-(1/p^2)))$, et d'autre part, $\zeta(2) = \pi^2/6$, alors

$$\sum_{p\geq 2}\frac{1}{p^2} \leq \sum_{p\geq 2} -\log\left(1-\frac{1}{p^2}\right) = \log\left(\zeta(2)\right) = \log\left(\frac{\pi^2}{6}\right) \leq \frac{1}{2}, \quad \text{d'où } \sum_{p\geq 3}\frac{1}{p^2} \leq \frac{1}{4}, \tag{4.21}$$

et ainsi

$$c_H \geq 1 + \frac{H(H-2)}{2} - \frac{H^2}{4} = \frac{(H-2)^2}{4}. \tag{4.22}$$

On en déduit

$$\operatorname{card}\left(\mathcal{E}_{D,H}(2)\right) > \frac{1}{8}(H-2)^{D+1}, \tag{4.23}$$

et finalement, pour tout $D \geq 2$ et tout $H \geq 2$, $\operatorname{card}(\mathcal{A}_{D,H}) > (D/8)(H-2)^{D+1}$.

Pour $D = 1$ et tout nombre réel $H \geq 1$, on a $A_{1,H} = \mathcal{A}_{1,H}$ et leur cardinal est égal à celui de l'ensemble des polynômes $P \in \mathbf{Z}[X]$ qui s'écrivent

$$P(X) = aX + b \quad \text{avec } 1 \leq a \leq H,\ |b| \leq H,\ \operatorname{pgcd}(a, b) = 1. \tag{4.24}$$

Avec des calculs analogues à ceux faits précédemment, on trouve

$$\operatorname{card}\left(A_{1,H}\right) \geq 2[H]^2 - \sum_{p \geq 2}\left(\left[\frac{H}{p}\right] 2\left[\frac{H}{p}\right]\right) \tag{4.25}$$

et alors

$$\operatorname{card}\left(A_{1,H}\right) \geq 2[H]^2 - 2[H]^2 \sum_{p \geq 2} \frac{1}{p^2} \geq 2[H]^2 - 2[H]^2 \frac{1}{2} = [H]^2 > (H-1)^2. \tag{4.26}$$

4.2 Démonstration du lemme 1.1

4.2.1 Majoration de $\operatorname{card}(E_{D,N})$. Soient D un entier ≥ 1 et N un nombre réel positif ou nul. Soit α dans $E_{D,N}$ avec $\deg(\alpha) = d$. Comme $d \leq D$ et $h(\alpha) \leq N$, d'après (2.9),

$$\mathcal{H}(\alpha) \leq 2^{d-1} e^{dh(\alpha)} \leq 2^{D-1} e^{DN}. \tag{4.27}$$

On a donc $E_{D,N} \subset A_{D,H}$ pour $H = 2^{D-1} e^{DN}$ et, en utilisant la majoration obtenue pour le cardinal de $A_{D,H}$ au lemme 4.1 (on a $H \geq 1$ car $D \geq 1$ et $N \geq 0$), on a

$$\operatorname{card}\left(E_{D,N}\right) \leq D 2^{D-1} e^{DN}\left(2^D e^{DN} + 1\right)^D. \tag{4.28}$$

Montrons que $D2^{D-1}e^{DN}(2^D e^{DN} + 1)^D \leq e^{D(D+1)(N+1)}$, ce qui donnera la majoration annoncée. On a

$$\begin{aligned} &D2^{D-1}e^{DN}\left(2^D e^{DN} + 1\right)^D \\ &\quad = D2^{D-1}e^{DN}\left((2^D+1)e^{DN} - e^{DN} + 1\right)^D \\ &\quad \leq D2^{D-1}e^{DN}\left((2^D+1)e^{DN}\right)^D = D2^{D-1}\left(2^D+1\right)^D e^{D(D+1)N}. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Il nous suffit donc de montrer que $D2^{D-1}(2^D+1)^D \le e^{D(D+1)}$. Par récurrence sur D, on montre que pour tout $D \ge 2$, on a $D2^{D-1} \le e^D$, et une étude facile de la fonction $x \mapsto e^x - 2^x - 1$, montre que, pour tout $D \ge 2$, $(2^D+1)^D \le e^{D^2}$. Pour $D = 1$ l'inégalité se montre par un calcul direct.

4.2.2 Minoration de card$(E_{D,N})$. Si $D \ge 1$ et $0 \le N < 1$, comme l'ensemble $E_{D,N}$ contient 0, alors

$$e^{D(D+1)(N-1)} < 1 \le \operatorname{card}\left(E_{D,N}\right). \tag{4.30}$$

Pour tout entier $D \ge 2$ et tout nombre réel $N \ge 1$, nous montrons que l'ensemble $E_{D,N}$ contient $\mathcal{A}_{D,H}$ pour $H = e^{DN}/\sqrt{D+1}$. Soit H' un nombre réel positif, et soit $\alpha \in \mathcal{A}_{D,H'}$. Alors $\deg(\alpha) = D$ et $\mathcal{H}(\alpha) \le H'$. D'aprés l'inégalité (2.8), on a

$$h(\alpha) \le \frac{1}{D}\log \mathcal{H}(\alpha) + \frac{1}{2D}\log(D+1) \le \log\left((D+1)^{1/2D} H'^{1/D}\right). \tag{4.31}$$

On en déduit que $\mathcal{A}_{D,H'} \subset E_{D,N}$ dès que $\log((D+1)^{1/2D}H'^{1/D}) \le N$.

Comme $D \ge 2$ et $N \ge 1$, alors $H = e^{DN}/\sqrt{D+1} \ge 2$ et nous pouvons appliquer la minoration obtenue pour le cardinal de $\mathcal{A}_{D,H}$ au lemme 4.1 :

$$\operatorname{card}\left(E_{D,N}\right) \ge \operatorname{card}\left(\mathcal{A}_{D,H}\right) > \frac{D}{8}(H-2)^{D+1}. \tag{4.32}$$

Or $e^D/\sqrt{D+1} \ge 4$, donc $H \ge 4e^{D(N-1)} \ge 2 + 2e^{D(N-1)}$, d'où $H - 2 \ge 2e^{D(N-1)}$ et

$$\operatorname{card}\left(E_{D,N}\right) > \frac{D}{8}\left(2e^{D(N-1)}\right)^{D+1} = D2^{D-2}e^{D(D+1)(N-1)}, \tag{4.33}$$

donc

$$\operatorname{card}\left(E_{D,N}\right) > e^{D(D+1)(N-1)}. \tag{4.34}$$

Si α est de degré 1, on a $\alpha = a/b$ où a et $b \ne 0$ sont des entiers premiers entre eux. On a donc

$$h(\alpha) = \log\left(H(\alpha)\right) = \log\left(\max\left(|a|,|b|\right)\right) = \log\left(\mathcal{H}(\alpha)\right) \tag{4.35}$$

et donc, pour tout $N \ge 1$, on a $E_{1,N} = \{\alpha \in \mathbf{Q};\ h(\alpha) \le N\} = \{\alpha \in \mathbf{Q};\ \log(\mathcal{H}(\alpha)) \le N\}$. On voit que $E_{1,N} \supset A_{1,H'}$ dès que $H' \le e^N$, donc, en particulier,

$$\operatorname{card}\left(E_{1,N}\right) \ge \operatorname{card}\left(A_{1,H}\right) > (H-1)^2 \quad \text{pour } H = e^N. \tag{4.36}$$

Comme $N \geq 1$, alors $H = e^N \geq 2e^{N-1} \geq 1 + e^{N-1}$, et on a

$$\operatorname{card}\left(E_{1,N}\right) > e^{2(N-1)}, \tag{4.37}$$

ce qui complète la démonstration du lemme 1.1.

4.3 Autres résultats

Dans ce travail, nous nous servons du lemme 1.1, mais d'autres énoncés sont connus. Pour les présenter nous énonçons d'abord une conséquence du lemme 1.1.

Pour tout entier $d \geq 1$ et tout nombre réel $N \geq 0$, notons $\mathcal{E}_{d,N}$ l'ensemble des nombres algébriques de degré *exactement* d et de hauteur logarithmique absolue $\leq N$. En utilisant le lemme 1.1, on obtient l'encadrement suivant.

Lemme 4.2. Pour tout entier $d \geq 2$ et tout nombre réel $N \geq 0$, le cardinal de $\mathcal{E}_{d,N}$ vérifie

$$c_1(d,N)e^{d(d+1)N} < \operatorname{card}\left(\mathcal{E}_{d,N}\right) < c_2(d,N)e^{d(d+1)N} \tag{4.38}$$

où $c_1(d,N) = e^{-d(d+1)} - e^{-2dN+d^2-d}$ et $c_2(d,N) = (1 - e^{-2d(N+d)})e^{d(d+1)}$. □

(Si $d = 1$ et $N \geq 0$, par un calcul simple analogue à celui de la fin de la preuve du lemme 1.1, on obtient $(e^N - 1)^2 < \operatorname{card}(\mathcal{E}_{1,N}) \leq 2e^{2N} + e^N$.)

Remarquons que pour N fixe et $d \to \infty$, la minoration du lemme 4.2 est triviale car pour d assez grand $c_1(d,N) < 0$. En revanche, Loher [8] (cf. aussi [10]) a obtenu le résultat suivant.

Théorème 4.3 (Loher)**.** Pour tout entier $d \geq 1$, et tout nombre réel $N \geq (1/d)\log 2$,

$$\operatorname{card}\left(\mathcal{E}_{d,N}\right) \geq c_3(d)e^{d(d+1)N} \tag{4.39}$$

où $c_3(d) = 2^{-d-2}(d+1)^{-(1/2)(d+1)}$. □

Pour d fixe et $N \to \infty$, la minoration du lemme 4.2 donne le même ordre de grandeur que le théorème de Loher, à savoir, $e^{d(d+1)N}$, mais la constante du théorème 4.3 est meilleure pour tout $d \geq 2$. D'ailleurs, en remarquant que l'ensemble $E_{D,N}$ est la réunion disjointe, pour $d \in \{1, \dots, D\}$, des ensembles $\mathcal{E}_{d,N}$, on voit que le théorème de Loher implique

pour tout entier $D \geq 1$, *et tout nombre réel* $N \geq (1/D) \log 2$,

$$\operatorname{card}\left(E_{D,N}\right) \geq c_3(D) e^{D(D+1)N}, \tag{4.40}$$

ce qui est meilleur que la borne inférieure du lemme 1.1, pour tout $D \geq 2$.

Pour la majoration, Schmidt obtient, dans [16, (équation (1.4), page 170)], une borne ayant même ordre de grandeur que celle du lemme 4.2, mais dont la constante est de qualité légèrement inférieure à $c_2(d, N)$. Il montre que *pour tout entier* $d \geq 1$, *et tout nombre réel* $N \geq 0$,

$$\operatorname{card}\left(\mathcal{E}_{d,N}\right) \leq 2^{2d^2+14d+11} e^{d(d+1)N}. \tag{4.41}$$

Concernant des estimations asymptotiques en N, il y a deux résultats connus. Pour $d = 1$, Schanuel (cf. [14] et aussi [10, 16]) montre que

$$\operatorname{card}\left(\mathcal{E}_{1,N}\right) = \frac{12}{\pi^2} e^{2N} + O\left(N e^{N}\right), \tag{4.42}$$

et pour $d = 2$, Schmidt montre dans [17], que

$$\operatorname{card}\left(\mathcal{E}_{2,N}\right) = \frac{8}{\zeta(3)} e^{6N} + O\left(N e^{4N}\right), \tag{4.43}$$

où ζ est la fonction zeta de Riemann. Aucune estimation asymptotique concernant le cardinal de $\mathcal{E}_{d,N}$ pour $d \geq 3$, ne semble actuellement connue ([15, page 27] et [17, page 346]). Néanmoins, Masser et Vaaler [10] ont obtenu le résultat suivant.

Théorème 4.4 (Masser-Vaaler). Pour tout entier $d \geq 1$, on a

$$\lim_{N \to \infty} e^{-d(d+1)N} \operatorname{card}\left(\mathcal{E}_{d,N}\right) = c_4(d) \tag{4.44}$$

où $c_4(d) = d\gamma(d)/2\zeta(d+1)$ et $\gamma(d) = 2^{d+1}(d+1)^{\delta} \prod_{k=1}^{\delta}((2k)^{d-2k}/(2k+1)^{d+1-2k})$ avec $\delta = [(d-1)/2]$. □

(La fonction $\gamma(d)$ vérifie $\lim_{d\to\infty}(\log\gamma(d)/d\log d) = -1/2$.) Le théorème 4.4 implique le résultat suivant. *Pour tout entier* $D \geq 1$, *il existe un entier* N_0 *tel que*, *pour tout* $N \geq N_0$, *on a*

$$\operatorname{card}\left(E_{D,N}\right) \leq \frac{2^{D-1} D^2 (D+1)^{(D-1)/2}}{\zeta(D+1)} e^{D(D+1)N}. \tag{4.45}$$

5 Construction d'exemples

Dans cette section, nous construisons la fonction f du théorème 1.2. Nous construisons aussi (théorème 5.4) une fonction g entière et transcendante, dont toutes ses dérivées, envoient tout nombre algébrique α dans $\mathbf{Z}[1/2, \alpha]$.

5.1 Construction de la fonction f

On rappelle que $\epsilon_{D,N} = \mathrm{card}\{\alpha \in \overline{\mathbf{Q}}/[\mathbf{Q}(\alpha) : \mathbf{Q}] \leq D,\ h(\alpha) \leq N\}$.

Soit ϕ une fonction positive telle que $\phi(x)/x$ tende vers 0 quand x tende vers l'infini.

Nous nous donnons une suite $(b_k)_{k\geq 1}$ de nombres réels > 0 telle que la série $\sum_{k\geq 1} b_k$ soit convergente, et un nombre réel $x_0 \geq 1$, tel que pour tout nombre réel $x \geq x_0$,

$$\phi(x) \leq x - 1. \tag{5.1}$$

Nous allons construire, récursivement, une suite strictement croissante $(N_\delta)_{\delta\geq 1}$ de nombres réels $\geq x_0$ tendant vers l'infini et une suite $(a_\delta)_{\delta\geq 1}$ de nombres rationnels vérifiant les conditions suivantes.

(i) Pour une infinité de δ, on a $a_\delta \neq 0$ et pour tout $\delta \geq 1$,

$$|a_\delta| \leq b_\delta\left(\delta + e^{\delta N_\delta}\right)^{-\delta\epsilon_{\delta,N_\delta}}. \tag{5.2}$$

(ii) Pour tout $\delta \geq 2$,

$$N_\delta \geq 2\left(\log(\delta-1) + \sum_{k=1}^{\delta-1} h(a_k) + (\delta-1)^2\epsilon_{\delta-1,N_{\delta-1}}\left(\log 2 + 1 + N_{\delta-1}\right)\right). \tag{5.3}$$

(iii) Pour tout $\delta \geq 2$,

$$\frac{N_\delta}{\phi(N_\delta)} \geq 2(\delta-1)^2\epsilon_{\delta-1,N_{\delta-1}}. \tag{5.4}$$

Pour la suite $(b_k)_{k\geq 1}$ on peut prendre, par exemple, $b_k = 2^{-k}$, pour tout $k \geq 1$.

Pour construire $(a_\delta, N_\delta)_{\delta\geq 1}$, on procède de la façon suivante.

On pose $N_1 = [x_0] + 1$, $c_1 = 1 + [2(1+e^{N_1})^{\epsilon_{1,N_1}}]$, et $a_1 = 1/c_1$.

Soit $\delta \geq 2$. Pour $1 \leq k \leq \delta - 1$, on suppose définis a_k et N_k vérifiant, pour $k \in \{1, \ldots, \delta-1\}$,

$$|a_k| \leq b_k\left(k + e^{kN_k}\right)^{-k\epsilon_{k,N_k}}, \tag{5.5}$$

et pour $k \in \{2, \ldots, \delta - 1\}$,

$$\begin{aligned} N_k &\geq 2\left(\log(k-1) + \sum_{r=1}^{k-1} h\big(a_r\big) + (k-1)^2 \epsilon_{k-1,N_{k-1}} \big(\log 2 + 1 + N_{k-1}\big)\right), \\ \frac{N_k}{\phi(N_k)} &\geq 2(k-1)^2 \epsilon_{k-1,N_{k-1}}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

(Remarquer que la dernière inégalité est possible puisque la fonction $\phi(x)/x$ tend vers 0 quand x tend vers l'infini.)

On choisit pour N_δ un nombre réel vérifiant les conditions (5.3) et (5.4), et on pose $c_\delta = 1 + [2^\delta(\delta + e^{\delta N_\delta})^{\delta \epsilon_{\delta, N_\delta}}]$ et $a_\delta = c_\delta^{-1}$.

Il est clair que les a_δ peuvent être choisis de façon à ce que tous (à partir d'un certain rang) soient non nuls.

Ainsi, la suite $(a_\delta, N_\delta)_{\delta \geq 1}$ satisfait les conditions (5.2), (5.3) et (5.4). En particulier, la condition (5.3) implique que la suite $(N_\delta)_{\delta \geq 1}$ est strictement croissante et tend vers l'infini.

On pose, pour tout $k \geq 1$,

$$P_k(X) = \prod_{\beta \in E_{k,N_k}} (X - \beta)^k. \tag{5.7}$$

On définit la fonction f en posant, pour tout $z \in \mathbf{C}$,

$$f(z) = \sum_{k \geq 1} a_k P_k(z). \tag{5.8}$$

Pour démontrer le théorème 1.2, nous aurons besoin des lemmes suivants.

Lemme 5.1. La fonction f est une fonction entière et transcendante sur $\mathbf{C}(z)$. □

Démonstration du lemme 5.1. Soient $R > 0$ et $z \in \overline{D(0,R)}$. Nous écrivons la série

$$\sum_{k \geq 1} a_k P_k(z) = \sum_{k=1}^{[R]} a_k P_k(z) + \sum_{k \geq [R]+1} a_k P_k(z). \tag{5.9}$$

La première somme est finie et définit un polynôme. Nous regardons donc la deuxième. Pour tout $k \geq [R] + 1$, nous avons

$$\big|a_k P_k(z)\big| = \big|a_k\big| \prod_{\alpha \in E_{k,N_k}} |z - \alpha|^k \leq \big|a_k\big| \prod_{\alpha \in E_{k,N_k}} \big(|z| + |\alpha|\big)^k. \tag{5.10}$$

Pour $\alpha \in E_{k,N_k}$, nous avons $|\alpha| \leq M(\alpha) = e^{\deg(\alpha)h(\alpha)} \leq e^{kN_k}$, et donc

$$\left|a_k P_k(z)\right| \leq \left|a_k\right| \prod_{\alpha \in E_{k,N_k}} \left(|z| + e^{kN_k}\right)^k. \tag{5.11}$$

Or $|z| \leq R \leq k$, donc $|a_k P_k(z)| \leq |a_k| \, (k + e^{kN_k})^{k\epsilon_{k,N_k}}$, et, d'après la condition (5.2) sur la suite $(a_\delta)_{\delta \geq 1}$,

$$\left|a_k P_k(z)\right| \leq b_k. \tag{5.12}$$

Comme la série $\sum b_k$ est convergente, ceci montre que la série $\sum_{k\geq 1} a_k P_k(z)$ converge normalement sur tout compact de $\mathbf{C}$; sa limite f est une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$ tout entier.

Montrons maintenant que la fonction f n'est pas polynomiale ; comme elle est entière, cela montrera qu'elle est transcendante.

Supposons que f est un polynôme de degré $n \geq 1$.

Comme la suite $(\epsilon_{k,N_k})_{k\geq 1}$ est strictement croissante, il existe $k_0 \geq 1$, tel que pour tout $k \geq k_0$, on a $(k-1)\epsilon_{k-1,N_{k-1}} \geq n$.

Soit $K \geq k_0$ tel que $a_{K-1} \neq 0$. Considérons la somme

$$g_K(z) = \sum_{k=1}^{K-1} a_k P_k(z). \tag{5.13}$$

C'est un polynôme de degré $(K-1)\epsilon_{K-1,N_{K-1}} \geq n$. La différence

$$f(z) - g_K(z) = \sum_{k \geq K} a_k P_k(z) \tag{5.14}$$

est un polynôme de degré $\leq \max\{(K-1)\epsilon_{K-1,N_{K-1}}, n\} = (K-1)\epsilon_{K-1,N_{K-1}}$. Or, pour tout $k \geq K$, le polynôme P_k est multiple de P_K, donc $f(z) - g_K(z)$ s'annule en tous les zéros de P_K, c'est-à-dire, en $K\epsilon_{K,N_K}$ points.

Comme le polynôme $f(z) - g_K(z)$ est de degré $\leq (K-1)\epsilon_{K-1,N_{K-1}} < K\epsilon_{K,N_K}$, c'est le polynôme nul, et donc

$$-a_K P_K(z) = \sum_{k \geq K+1} a_k P_k(z). \tag{5.15}$$

Soit $z_0 \in E_{K+1,N_{K+1}} \setminus E_{K,N_K}$. Alors

$$\forall k \geq K+1, \quad P_k(z_0) = 0, \quad P_K(z_0) \neq 0. \tag{5.16}$$

Nous en concluons que, pour tout $K \geq k_0$, on a $a_K = 0$, ce qui contredit la condition (i).

■

Lemme 5.2. Pour tout entier naturel σ, la fonction dérivée $f^{(\sigma)}$ envoie tout nombre algébrique α, dans $\mathbf{Q}(\alpha)$. □

Démonstration du lemme 5.2. Soient $\alpha \in \overline{\mathbf{Q}}$ et $\sigma \in \mathbf{N}$. Par hypothèse, la suite $(N_\delta)_{\delta \geq 1}$ tend vers l'infini, donc

$$\overline{\mathbf{Q}} = \bigcup_{k \geq 1} E_{k,N_k}, \tag{5.17}$$

et comme les ensembles $(E_{k,N_k})_{k \geq 1}$ forment une suite croissante pour l'inclusion, il existe $k' \geq 1$ tel que $\alpha \in E_{k,N_k}$, pour tout $k \geq k'$. Notons $k_0 = \min\{k' \geq 1 / \forall k \geq k',\ \alpha \in E_{k,N_k}\}$ et $M = \max\{k_0, \sigma+1\}$.

Si $M = 1$ (i.e., $\sigma = 0$ et $k_0 = 1$), alors $f(\alpha) = 0$.

Si $M > 1$, pour tout $k \geq M$, on a $\alpha \in E_{k,N_k}$ et $k > \sigma$. Donc, pour tout $k \geq M$, $P_k^{(\sigma)}(\alpha) = 0$ et

$$f^{(\sigma)}(\alpha) = \sum_{k=1}^{M-1} a_k P_k^{(\sigma)}(\alpha). \tag{5.18}$$

De plus, les polynômes P_k sont des puissances de polynômes unitaires dont les ensembles de zéros sont des réunions de systèmes complets de conjugués sur $\mathbf{Q}$, ils sont donc fixés par tout élément du groupe de Galois de $\overline{\mathbf{Q}}$ sur $\mathbf{Q}$. Ils sont donc à coefficients rationnels, ainsi que tous leurs polynômes dérivés, et comme, par définition, les nombres a_k sont aussi rationnels,

$$f^{(\sigma)}(\alpha) \in \mathbf{Q}(\alpha). \tag{5.19}$$

■

Le lemme suivant sera lui aussi utile pour la démonstration du théorème 1.2.

Lemme 5.3. Pour tout entier $D \geq 1$ et tout nombre réel $N \geq 0$, nous avons

$$\operatorname{card}\left(E_{D,N} \cap \overline{D(0,1)}\right) \geq \frac{1}{2} \operatorname{card}\left(E_{D,N}\right). \tag{5.20}$$

□

Démonstration du lemme 5.3. Soient D un entier positif et N un nombre réel positif ou nul.

Pour un nombre algébrique α non nul, on a $\deg(\alpha) = \deg(1/\alpha)$ et $h(\alpha) = h(1/\alpha)$, donc α appartient à $E_{D,N}$ si et seulement si $1/\alpha$ appartient à $E_{D,N}$. De plus, α appartient au disque fermé $\overline{D(0,1)}$ si et seulement si $1/\alpha$ n'appartient pas au disque ouvert $D(0,1)$. D'où

$$\operatorname{card}\left(E_{D,N} \cap \overline{D(0,1)}\right) = \operatorname{card}\left(E_{D,N} \setminus D(0,1)\right) + 1, \tag{5.21}$$

et donc

$$\begin{aligned}\operatorname{card}\left(E_{D,N}\right) &= \operatorname{card}\left(E_{D,N} \cap \overline{D(0,1)}\right) + \operatorname{card}\left(E_{D,N} \setminus D(0,1)\right)\\ &\leq 2\operatorname{card}\left(E_{D,N} \cap \overline{D(0,1)}\right),\end{aligned} \tag{5.22}$$

ce qui démontre le lemme. ■

Démonstration du théorème 1.2. Soient D et d des entiers tels que $d \geq D \geq 1$.

Nous commençons par remarquer que, d'après le lemme 5.2,

$$\Sigma_{D,N_d}(f,1) = \left\{\alpha \in \overline{\mathbf{Q}} \cap \overline{D(0,1)} / \deg(\alpha) \leq D,\ h(\alpha) \leq N_d,\ h\big(f(\alpha)\big) \leq N_d\right\}. \tag{5.23}$$

Montrons que cet ensemble contient $E_{D,\phi(N_d)+1} \cap \overline{D(0,1)}$. Soit $\alpha \in \overline{\mathbf{Q}}$ tel que

$$\deg(\alpha) \leq d, \qquad h(\alpha) \leq \phi\big(N_d\big) + 1. \tag{5.24}$$

Comme $N_d \geq x_0$, alors, d'après (5.1), $\phi(N_d) \leq N_d - 1$, et $h(\alpha) \leq N_d$. Comme, en plus, $\deg(\alpha) \leq d$, alors $\alpha \in E_{d,N_d}$ et pour tout $k \geq d$, on a $P_k(\alpha) = 0$.

Si $d = D = 1$, alors $f(\alpha) = 0$ et on a l'inclusion $E_{1,\phi(N_1)+1} \cap \overline{D(0,1)} \subset \Sigma_{1,N_1}(f,1)$.

Supposons maintenant que $d \geq D \geq 1$ et $d \geq 2$. Alors

$$f(\alpha) = \sum_{k=1}^{d-1} a_k P_k(\alpha). \tag{5.25}$$

Majorons sa hauteur. En appliquant les formules (2.4), puis (2.3), on obtient

$$\begin{aligned}h\big(f(\alpha)\big) = h\left(\sum_{k=1}^{d-1} a_k P_k(\alpha)\right) &\leq \log(d-1) + \sum_{k=1}^{d-1} h\big(a_k P_k(\alpha)\big)\\ &\leq \log(d-1) + \sum_{k=1}^{d-1} h\big(a_k\big) + \sum_{k=1}^{d-1} h\big(P_k(\alpha)\big).\end{aligned} \tag{5.26}$$

Soit $k \in \{1, \dots, d-1\}$. Nous avons

$$P_k(\alpha) = \prod_{\beta \in E_{k,N_k}} (\alpha - \beta)^k. \tag{5.27}$$

En utilisant les formules (2.3) et (2.4), on obtient

$$h\big(P_k(\alpha)\big) \leq k \sum_{\beta \in E_{k,N_k}} h(\alpha - \beta) \leq k \sum_{\beta \in E_{k,N_k}} \big(\log 2 + h(\alpha) + h(\beta)\big), \tag{5.28}$$

et comme, pour tout $\beta \in E_{k,N_k}$, on a $h(\beta) \leq N_k$, et que, par hypothèse, $h(\alpha) \leq \phi(N_d) + 1$, alors

$$h\big(P_k(\alpha)\big) \leq k\epsilon_{k,N_k}\big(\log 2 + \phi\big(N_d\big) + 1 + N_k\big). \tag{5.29}$$

D'où

$$h\big(f(\alpha)\big) \leq \log(d-1) + \sum_{k=1}^{d-1} h\big(a_k\big) + \sum_{k=1}^{d-1} k\epsilon_{k,N_k}\big(\log 2 + \phi\big(N_d\big) + 1 + N_k\big). \tag{5.30}$$

Or, les suites $(N_k)_{k \geq 1}$ et $(\epsilon_{k,N_k})_{k \geq 1}$ sont croissantes, donc $h(f(\alpha))$ est inférieure à

$$\begin{aligned} &\log(d-1) + \sum_{k=1}^{d-1} h\big(a_k\big) + (d-1)^2\epsilon_{d-1,N_{d-1}}\big(\log 2 + \phi\big(N_d\big) + 1 + N_{d-1}\big) \\ &\quad = \phi\big(N_d\big)\big((d-1)^2\epsilon_{d-1,N_{d-1}}\big) + \log(d-1) + \sum_{k=1}^{d-1} h\big(a_k\big) \\ &\qquad + (d-1)^2\epsilon_{d-1,N_{d-1}}\big(\log 2 + 1 + N_{d-1}\big) \end{aligned} \tag{5.31}$$

ce qui est $\leq N_d$, d'après les conditions (5.3) et (5.4).

En particulier, si α appartient à $E_{D,\phi(N_d)+1} \cap \overline{D(0,1)}$, alors $\deg(\alpha) \leq D \leq d$ et $h(f(\alpha)) \leq N_d$, ce qui montre que α appartient à $\Sigma_{D,N_d}(f,1)$. Ainsi, pour tout couple (D,d) avec $d \geq D \geq 1$, nous avons

$$\sigma_{D,N_d} = \operatorname{card}\big(\Sigma_{D,N_d}(f,1)\big) \geq \operatorname{card}\big(E_{D,\phi(N_d)+1} \cap \overline{D(0,1)}\big). \tag{5.32}$$

En appliquant les lemmes 1.1 et 5.3, nous obtenons

$$\sigma_{D,N_d} \geq \frac{1}{2}\operatorname{card}\big(E_{D,\phi(N_d)+1}\big) > \frac{1}{2}e^{D(D+1)\phi(N_d)}. \tag{5.33}$$

■

On remarque que la démonstration se simplifie considérablement si on se contente de construire f entière et transcendante vérifiant (1.5). Pour cela, il suffit de se donner une suite strictement croissante $(N_\delta)_{\delta\geq 1}$ de nombres réels ≥ 1 tendant vers l'infini et une suite $(a_\delta)_{\delta\geq 1}$ de nombres rationnels vérifiant la condition (i).

Le théorème 1.2, qui fait intervenir les dérivées de la fonction transcendante, pose le problème suivant. Peut-on espérer avoir un énoncé dans le sens du théorème 1.3, faisant lui aussi, intervenir les dérivées ?

5.2 Construction de la fonction g

En modifiant la construction de la fonction f du théorème 1.2, on peut construire une fonction g entière et transcendante, vérifiant la même conclusion (1.6) concernant le cardinal de $\Sigma_{D,N}(g,1)$, mais pour laquelle la première conclusion est changée. Précisément :

Théorème 5.4. Il existe une fonction g entière et transcendante sur $\mathbf{C}(z)$ telle que,

$$\forall \alpha \in \overline{\mathbf{Q}}, \quad \forall \sigma \geq 0, \quad g^{(\sigma)}(\alpha) \in \mathbf{Z}\left[\frac{1}{2}, \alpha\right]. \tag{5.34}$$

□

Démonstration du théorème 5.4. On se donne une suite croissante $(N_k)_{k\geq 1}$ de nombres réels ≥ 1 tendant vers l'infini et une suite $(b_k)_{k\geq 1}$ de nombres rationnels tels que

(i) pour une infinité de $k \geq 1$, $b_k \neq 0$,

(ii) pour tout $k \geq 1$, on ait $|b_k| \leq 2^{-k}(k + e^{kN_k})^{-k\epsilon_{k,N_k}}$,

(iii) pour tout $k \geq 1$, $b_k \in \mathbf{Z}[1/2]$. (Comme $\mathbf{Z}[1/2]$ est dense dans $\mathbf{Q}$, ceci est possible.)

On pose, pour tout $k \geq 1$,

$$Q_k(X) = \prod_{\beta \in E_{k,N_k}} P_\beta(X)^k, \tag{5.35}$$

où P_β est le polynôme minimal de β sur $\mathbf{Z}$, et, pour tout $z \in \mathbf{C}$,

$$g(z) = \sum_{k\geq 1} b_k Q_k(z). \tag{5.36}$$

Les lemmes suivants démontrent le théorème 5.4.

Lemme 5.5. La fonction g est entière et transcendante. □

La démonstration est identique à celle du lemme 5.1.

Lemme 5.6. Pour tout entier naturel σ, la fonction dérivée $g^{(\sigma)}$ envoie tout nombre algébrique α dans $\mathbf{Z}[1/2, \alpha]$. □

Démonstration du lemme 5.6. Cette démonstration suit celle du lemme 5.2. On se donne α dans $\overline{\mathbf{Q}}$ et σ dans $\mathbf{N}$. Il existe un nombre entier $M \geq 1$, tel que, pour tout $k \geq M$, on ait $\alpha \in E_{k,N_k}$ et $k > \sigma$, donc $Q_k^{(\sigma)}(\alpha) = 0$ et

$$g^{(\sigma)}(\alpha) = \sum_{k=1}^{M-1} b_k Q_k^{(\sigma)}(\alpha). \tag{5.37}$$

Comme les polynômes Q_k sont à coefficients dans $\mathbf{Z}$ et que, de plus, d'après la condition (iii), pour tout $k \geq 1$, $b_k \in \mathbf{Z}[1/2]$, on a $g^{(\sigma)}(\alpha) \in \mathbf{Z}[1/2, \alpha]$, ce qui démontre le lemme 5.6 et donc le théorème 5.4. ■

Si on se donne une fonction ϕ comme au théorème 1.2 et si les suites (N_k) et (b_k) intervenant dans la fonction g vérifient de plus les conditions (5.3) (avec (b_k) à la place de (a_k)) et (5.4), alors la fonction g ainsi obtenue satisfait de plus la conclusion (1.6) du théorème 1.2.

Remerciements

Ces résultats font partie de ma thèse de doctorat, réalisée à l'Institut de Mathématiques de Jussieu. Je remercie Marc Hindry et Michel Waldschmidt de l'avoir dirigée, ainsi que Joseph Oesterlé et François Gramain pour leurs commentaires.

La bibliographie

[1] E. Bombieri and J. Pila, *The number of integral points on arcs and ovals*, Duke Mathematical Journal **59** (1989), no. 2, 337–357.

[2] N. D. Elkies, *Rational points near curves and small nonzero* $|x^3 - y^2|$ *via lattice reduction*, Algorithmic Number Theory (Leiden, 2000), Lecture Notes in Comput. Sci., vol. 1838, Springer, Berlin, 2000, pp. 33–63.

[3] G. Faber, *Über arithmetische Eigenschaften analytischer Funktionen*, Mathematische Annalen **58** (1904), no. 4, 545–557.

[4] F. Gramain, *Fonctions entières arithmétiques : un aperçu historique*, Pub. IRMA-Lille, Vol.VI -Fasc.2 -n.1, 1984.

[5] F. Gramain, M. Mignotte, and M. Waldschmidt, *Valeurs algébriques de fonctions analytiques*, Acta Arithmetica **47** (1986), no. 2, 97–121.

[6] S. Lang, *Introduction to Transcendental Numbers*, Addison-Wesley, Massachusetts, 1966.

[7] ———, *Algebra*, Revised 3rd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 211, Springer, New York, 2002.

[8] T. Loher, *Counting points of bounded height*, Inauguraldissertation, Universität Basel, 2001.

[9] K. Mahler, *Lectures on Transcendental Numbers*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 546, Springer, Berlin, 1976.

[10] D. Masser and J. Vaaler, *Counting algebraic numbers with large height I*, submitted.

[11] B. H. Neumann and R. Rado, *Monotone functions mapping the set of rational numbers on itself*, Journal of Australian Mathematical Society. Series A **3** (1963), 282–287.

[12] J. Pila, *Geometric postulation of a smooth function and the number of rational points*, Duke Mathematical Journal **63** (1991), no. 2, 449–463.

[13] J. Pila and A. J. Wilkie, *The rational points of a definable set*, Duke Mathematical Journal **133** (2006), no. 3, 591–616.

[14] S. H. Schanuel, *Heights in number fields*, Bulletin de la Société Mathématique de France **107** (1979), no. 4, 433–449.

[15] W. M. Schmidt, *Diophantine Approximations and Diophantine Equations*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1467, Springer, Berlin, 1991.

[16] ———, *Northcott's theorem on heights. I. A general estimate*, Monatshefte für Mathematik **115** (1993), no. 1-2, 169–181.

[17] ———, *Northcott's theorem on heights. II. The quadratic case*, Acta Arithmetica **70** (1995), no. 4, 343–375.

[18] P. Stäckel, *Ueber arithmetische Eingenschaften analytischer Functionen*, Mathematische Annalen **46** (1895), no. 4, 513–520.

[19] ———, *Arithmetische Eingenschaften analytischer Functionen*, Acta Mathematica **25** (1902), 371–383.

[20] A. Surroca, *Sur le nombre de points algébriques où une fonction analytique transcendante prend des valeurs algébriques*, Comptes Rendus Mathématique. Académie des Sciences. Paris, Série I **334** (2002), no. 9, 721–725.

[21] A. J. Van der Poorten, *Transcendental entire functions mapping every algebraic number field into itself*, Journal of Australian Mathematical Society. Series A **8** (1968), 192–193.

[22] M. Waldschmidt, *Diophantine Approximation on Linear Algebraic Groups. Transcendence Properties of the Exponential Function in Several Variables*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 326, Springer, Berlin, 2000.

Andrea Surroca : Département mathematik, ETH Zürich, 8092 Zürich, Switzerland
Courrier électronique : surroca@math.jussieu.fr