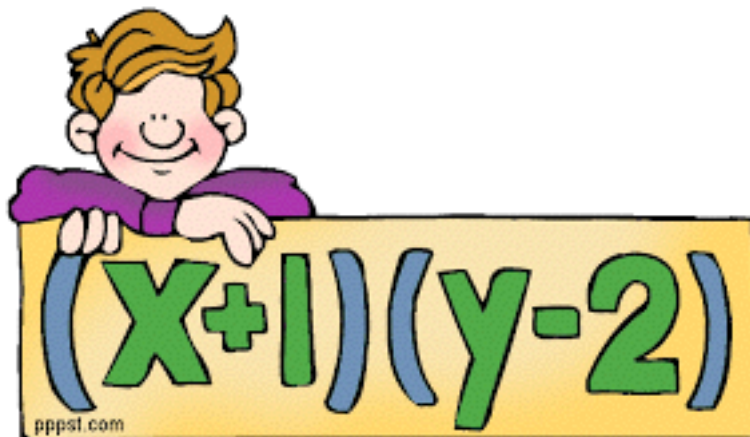


*Formation professionnelle - Secondaire I*

*Mémoire professionnel - Volée 2013-2016*

## Introduction à l'algèbre par des situations-problèmes



*Réalisé par:*

**Xabier Larrea**

**Rue Demesse 34**

**CH-1867 Ollon VD**

*Sous la direction de :*

**Daniele Périsset**

*Ollon, le 20 juin 2016*

## Résumé

L'algèbre est une matière redoutée des élèves et la manière dont elle est enseignée ne favorise pas son intégration chez les jeunes adolescents. L'approche traditionnelle du calcul littéral laisse peu de place au sens de l'algèbre et les élèves sont vite perdus entre les calculs arithmétiques de l'école primaire et les nouveaux calculs algébriques. Nous pensons que l'agencement actuel des objectifs d'apprentissages met l'accent sur des concepts trop abstraits du calcul littéral avant même qu'une pensée algébrique soit en place chez l'apprenant.

Ce travail de recherche propose une approche de l'algèbre par des situations-problèmes avec l'intention de donner du sens et d'aborder les nouvelles notions algébriques à partir de problèmes concrets. Nous avons analysé les spécificités des apprentissages algébriques en début du secondaire ainsi que les erreurs les plus fréquentes chez les élèves.

Nous avons exécuté une séquence d'enseignement basée sur des situations-problèmes dans une classe de 10<sup>ème</sup> HarmoS du Canton de Vaud. Les résultats de la séquence ont mis en évidence des difficultés de ces élèves au niveau des calculs purement techniques. Par contre, en ce qui concerne la résolution de problèmes, les élèves ont montré une performance supérieure, et cela même trois mois après le déroulement de la séquence. Ce travail montre, par ailleurs, qu'une approche de l'algèbre par situations-problèmes est compatible avec les contraintes de l'école publique.

## Mots-clés

Algèbre, calcul littéral, situation-problème, socio-constructivisme, école publique, secondaire

***Formation professionnelle - Secondaire I***

***Mémoire professionnel - Volée 2013-2016***

**Attestation d'authenticité**

Je soussigné certifie que ce mémoire constitue un travail original et j'affirme en être l'auteur. Je certifie avoir respecté le code d'éthique et de déontologie de la recherche en le réalisant.

Lieu : Ollon

Date : 30 mai 2016

Nom, prénom : Larrea, Xabier

Signature :

## Table de matières

1. Introduction	4
2. Problématique	5
3. Question de recherche	6
4. Cadre conceptuel	7
4.1. Le sens de l’algèbre	7
4.2. Les difficultés des élèves	9
4.3. Le modèle socio-constructiviste	11
4.4. Les situations-problème	12
5. Méthodologie	14
5.1. La classe 10VP/1	14
5.2. Objectifs de la séquence	15
5.3. Planification de la séquence	16
5.4. Analyse a priori de la situation-problème 1 (algèbre par la géométrie)	16
5.5. Exercices de consolidation	20
5.6. Évaluation	21
6. Résultats	22
6.1. Situation-problème 1	22
6.2. Analyse des erreurs	26
7. Discussion	29
8. Bilan et conclusion	32
8.1. Apport personnel de la recherche sur mon développement professionnel	33
9. Bibliographie	34
10. Annexes	36
A. Énoncé de la situation-problème 1	37
B. Énoncé de la situation-problème 2	38
C. Auto-évaluation formative	39
D. Évaluation sommative en fin de séquence	41
E. Items de l’Épreuve Cantonale de Référence	43
F. Productions des élèves lors de la situation-problème 1	45

# 1. Introduction

Il y a trois ans, au début de mon enseignement, une des premières séquences que j'ai enseignée était une introduction au calcul littéral. Les élèves ne comprenaient pas l'intérêt des lettres au milieu des nombres. Lettres qui rendaient les calculs mathématiques impossibles à leurs yeux. Malgré toutes les explications données, ces élèves n'ont pas compris le sens et l'utilité de l'algèbre. Les moments que j'ai vécu durant cette séquence m'ont profondément touché et ils sont certainement à l'origine de ce travail de mémoire.

L'algèbre est en effet une matière appréhendée par la majorité des élèves. Les élèves passent de l'école primaire au secondaire avec des représentations purement arithmétiques lorsqu'ils abordent, au début du secondaire, l'enseignement de l'algèbre. Un profond fossé conceptuel sépare les deux modes de raisonnement, arithmétique et algébrique. Cette rupture conduit de nombreux élèves à travailler en algèbre tout en conservant un mode de pensée arithmétique. L'addition de termes non semblables, les erreurs de signes, une interprétation erronée de l'égalité... sont des erreurs commises par une majorité d'élèves, dont l'origine se trouve au niveau du manque de transition entre l'apprentissage de l'arithmétique et celui de l'algèbre.

L'organisation classique des premiers apprentissages algébriques envisage le calcul littéral avant les équations. Le Plan d'Études Romand (PER, 2011) définit dans la progression des apprentissages l'élaboration d'expressions algébriques en 9<sup>ème</sup> HarmoS (9H) et des équations en 10H. Cette organisation des contenus est justifiée par le fait que chaque contenu enseigné est précédé de l'apprentissage des techniques auxquelles il fait référence. La résolution d'équations peut en effet nécessiter l'utilisation du calcul littéral. Néanmoins, cet agencement des apprentissages impose à l'élève de construire d'emblée une conception des expressions algébriques et du sens des lettres. Donner du sens aux concepts algébriques est donc une étape primordiale pour réussir la transition du mode de pensée arithmétique vers le mode de pensée algébrique pour les élèves au début du degré secondaire.

## 2. Problématique

Les tendances pédagogiques actuelles, le Plan d'Études Romand et les nouveaux manuels de mathématiques (Mathématiques 9-10-11, 2012) proposent un modèle d'enseignement de type socio-constructiviste. L'apprentissage des mathématiques par la résolution de problèmes fait actuellement l'unanimité en matière de didactique. Des recherches issues de différents pays témoignent de cette volonté (Vlassis et Demonty, 2002). Charlot souligne que « cette option pédagogique n'est pas nouvelle dans l'absolu. Ce qui est nouveau, c'est qu'elle est aujourd'hui officielle » (Bkouche et al., 1991).

Dans le cadre des mathématiques, certains savoirs à enseigner se prêtent bien à une approche socio-constructiviste : géométrie, grandeurs et mesures... , alors que d'autres sont plus difficiles à introduire comme dans le cas pour l'algèbre. Or, pour palier aux peines éprouvées par les élèves avec l'algèbre, il serait d'autant plus important de mettre en avant les erreurs et difficultés des élèves avec cette matière et donner du sens à ces apprentissages, comme préconisé par le modèle socio-constructiviste.

L'algèbre et le calcul littéral en particulier, sont souvent abordés d'une manière traditionnelle avec une introduction théorique et des exercices d'application à répétition.

En effet, selon Baton, Giot et Noël (1996, in Vlassis et Demonty 2002);

*« si nous relisons les manuels scolaires, les élèves sont, sauf exception, plongés d'emblée dans un tas d'habitudes et soumis trop rapidement et répétitivement sans motivation à des séries d'exercices de fixation qui peuvent créer des mécanismes pervers. Les élèves à qui on n'explique pas ou trop peu les fondements mêmes de ces habitudes finissent par croire que l'application de règles constitue l'essentiel des mathématiques et compensent leur manque de compréhension par une mémorisation dépourvu de sens. Ils en arrivent d'ailleurs à appliquer leurs propres règles, pas toujours dépourvues de cohérence interne. »*

Les manuels mathématiques 9-10-11 utilisés dans toute la Suisse romande ainsi que le PER et le découpage des objectifs de la Direction Générale de l'Enseignement Obligatoire<sup>1</sup> (DGEO) proposent l'introduction de l'algèbre en 9H avec le calcul littéral, en travaillant essentiellement l'élaboration de formule et la détermination de la valeur numérique d'une expression algébrique. Une approche de la réduction d'expressions littérales est également mise en place. Les équations et les problèmes de dénombrement ne sont abordés qu'en 10H, laissant les apprentissages de 9H dépourvus de sens comme indiqué dans la citation ci-dessus.

Des échanges avec des enseignants ont mis en évidence le désarroi des ces derniers face aux contradictions de l'école obligatoire qui demande de mettre en place des modèles pédagogiques modernes tout en imposant des impératifs qui rendent l'application de ceux-ci improbable. D'autres contraintes limitent aussi la mise en œuvre des principes socio-constructivistes dans l'école publique, tels que l'effectif important des classes, les classes parallèles imposant les dates et les contenus des évaluations, ainsi que la collaboration entre enseignants. Il y a donc un désaccord entre les courants pédagogiques actuels et les conditions d'enseignement dans les écoles publiques.

### **3. Question de recherche**

Il est donc légitime de se poser la question de la possibilité d'enseigner l'algèbre avec une approche constructiviste en utilisant des situations-problèmes dans le cadre de l'école publique. Nous effectuons donc, les hypothèses suivantes:

- L'approche du calcul littéral par des situations-problèmes permet aux élèves d'assimiler ces notions de manière plus durable et ils seront capables de les exporter dans d'autres contextes.
- L'approche du calcul littéral par des situations-problèmes au début du secondaire est possible dans le cadre de l'école publique.

---

<sup>1</sup> Sur le Canton de Vaud, la DGEO propose des découpages des objectifs aux enseignants des Mathématiques pour assurer la progression des apprentissages des élèves qui changent de voie ou de niveau.

## 4. Cadre conceptuel

### 4.1. Le sens de l'algèbre

Dans l'évolution du raisonnement arithmétique vers un raisonnement algébrique, nous devons tenir compte de trois concepts:

1. Le sens de l'égalité
2. Le sens des expressions algébriques
3. Le sens de la lettre

#### Le concept d'égalité

Les élèves qui arrivent au degré secondaire considèrent le signe d'égalité comme l'annonce d'une opération qu'ils doivent exécuter. Nous rencontrons souvent de fausses égalités dans l'enchaînement de calculs dont voici un exemple:  $12 : 3 = 4 + 7 = 11$ . Pour ces élèves, le signe égalité représente la réponse d'une opération. Les apprentissages algébriques exigent une conception différente du signe d'égalité. Il s'agit d'une relation entre deux objets, signifiant qu'ils sont identiques.

#### Le sens des expressions

Les expressions algébriques doivent être considérées comme des objets à part entière et non pas comme des procédures ou des opérations à effectuer. Et ce, malgré le fait qu'elles puissent contenir des signes d'opérations mathématiques comme par exemple  $2x - 3$  ou  $a + b$ . Ces opérations ne sont pas calculables. Nous devons les utiliser comme si nous disposions d'un seul nombre.

Par exemple, Wagner et al. (1984) ont interviewé 30 étudiants de 14-15 ans. Ces chercheurs leur ont demandé de trouver la valeur de  $(2r - 1)$  dans l'expression suivante :  $4(2r - 1) + 7 = 35$ . Un seul des étudiants interrogé a calculé directement la valeur de  $(2r - 1)$ . Les autres étudiants ont appliqué la distributivité pour simplifier l'expression afin de trouver la valeur de  $r$ , puis celle de  $(2r - 1)$ . Ces étudiants n'ont, à aucun moment, considéré  $(2r - 1)$  comme un objet. Pour eux, les expressions mathématiques sont des opérations à effectuer.



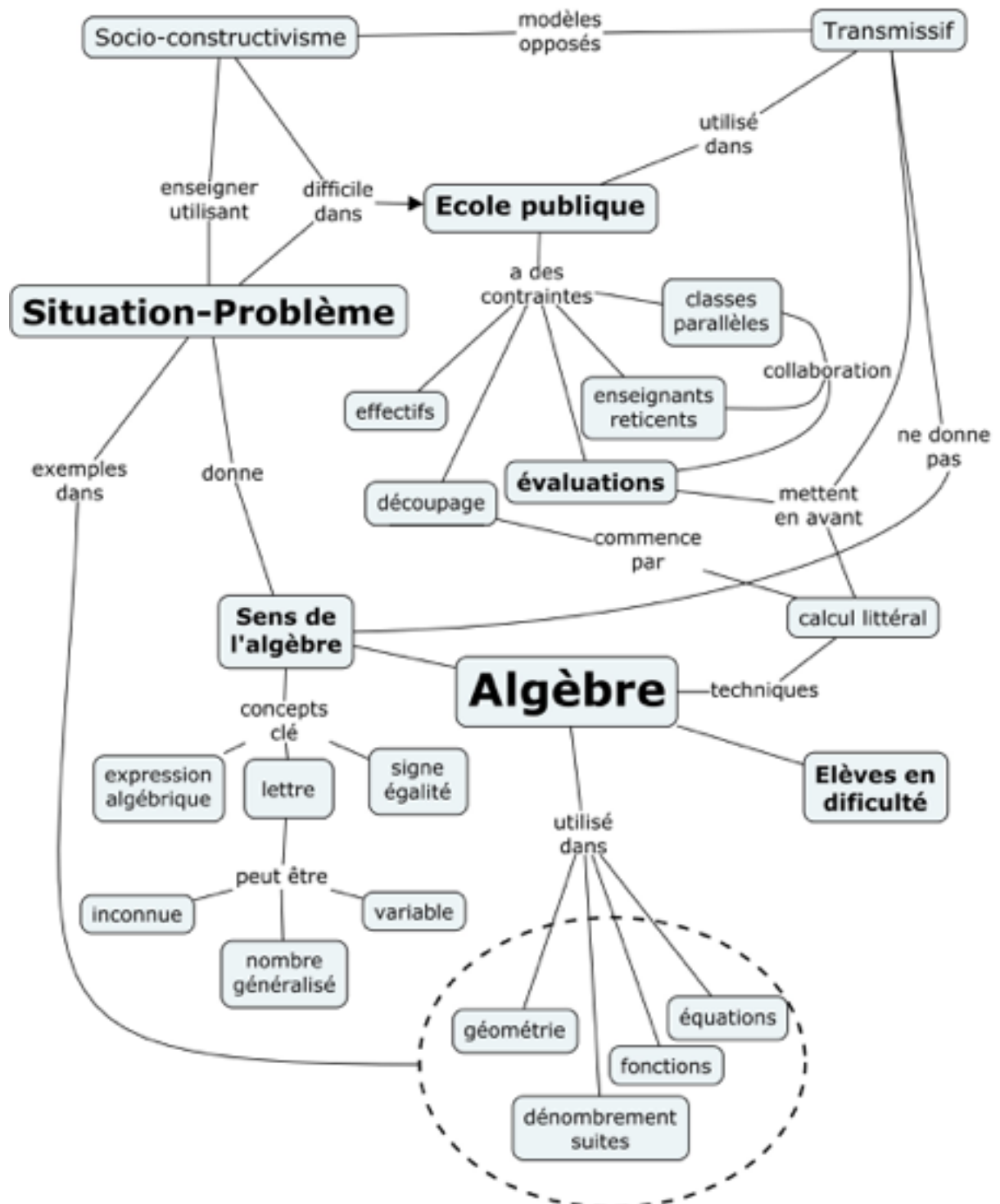


Figure 1: Carte heuristique des concepts en lien avec la problématique de l'apprentissage de l'algèbre

## Le sens de la lettre

Il y a trois conceptions de la lettre qui sont indispensables pour bien comprendre l'algèbre élémentaire : la lettre peut être une inconnue spécifique, un nombre généralisé ou une variable.

Lorsqu'une lettre est considérée comme une inconnue spécifique, l'élève doit être capable d'effectuer des opérations sur la lettre comme si elle était un nombre que nous ne connaissons pas. Par exemple, pour résoudre des équations. Dans certaines situations, une lettre peut prendre plus d'une valeur, par exemple lorsqu'on propose une expression comme  $a + b = 15$ . Le concept de variable non seulement implique que les lettres désignent un ensemble de valeurs, mais qu'en plus il est possible de trouver un lien entre les valeurs des lettres.

### 4.2. Les difficultés des élèves

L'organisation classique des premiers apprentissages algébriques envisage le calcul littéral avant les équations. Cet agencement des contenus impose à l'élève la construction de concepts algébriques très tôt. Un grand nombre d'erreurs a été constaté du fait que les élèves sont amenés à fonctionner en algèbre alors qu'ils conservent leur perspective arithmétique.

Ce relevé d'erreurs est basé sur les résultats d'une épreuve d'algèbre soumise à des élèves de première année du secondaire en Belgique (Vlassis et Dumonty, 2000).

#### La réduction de termes non semblables

La réduction de termes non semblables est une des erreurs les plus fréquentes chez les élèves. Par exemple, l'expression  $3x + 2x + 4y$  est souvent donnée  $9xy$  au lieu de sa réponse correcte  $5x + 4y$ . Cette erreur, qui pourrait être attribuée à un manque d'étude ou à la non-compréhension des termes semblables, témoigne du fonctionnement arithmétique des élèves. Ces élèves n'envisagent pas l'expression  $5x + 4y$  comme réponse possible, car le symbole  $+$  est interprété comme une opération à effectuer.

Pour aider les élèves à ne plus additionner les termes non semblables, les adultes ont souvent recours à l'expression : « on n'additionne pas des pommes avec des poires ! ». Or, il s'agit d'une aide peu efficace, car pour certains élèves  $9xy$  représente 9 pommes et poires. Cela renforce leur représentation erronée des expressions littérales et donne une interprétation incorrecte du sens des lettres qui sont perçues comme des nombres généralisés.

### **Les puissances**

D'après les données de Vlassis et Demonty (2000), quand une même lettre se trouve plusieurs fois dans une expression littérale à réduire, entre 10% et 19% des élèves utilisent des puissances pour en donner une forme réduite. Par exemple,  $a + a + a = a^3$  ou  $x + 5x = 5x^2$ .

### **La distributivité**

En ce qui concerne la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et la soustraction, Vlassis et Demonty (1998) ont trouvé que seulement 23% à 27% des élèves répondent correctement aux questions, et que la majorité des élèves applique la distributivité que sur le premier terme entre les parenthèses. Par exemple, les élèves répondent  $7(x + 3) = 7x + 3$  ou  $21x$  au lieu de la réponse correcte  $7x + 21$ .

Ces difficultés témoignent encore une fois de la conception arithmétique des élèves dans l'algèbre, car en arithmétique, la règle des priorités des opérations exige que nous effectuions d'abord les opérations entre parenthèses puis que nous multiplions. La distributivité nécessite donc l'acquisition de prérequis algébriques que les élèves viennent à peine de découvrir (notamment, le fait qu'on ne puisse pas additionner des termes non semblables,  $x$  et  $3$  comme dans l'exemple ci-dessus). La distributivité représente un saut conceptuel important pour les élèves à ce niveau d'apprentissage.

### **La convention de l'omission du signe « . »**

Une autre difficulté de l'algèbre réside dans le fait que les élèves sont confrontés à un nouveau langage qui comporte un certain nombre de conventions, notamment l'omission du signe « . » entre un nombre et une lettre, ou entre deux lettres, ou avant les parenthèses. Les nombreuses questions concernées par cette difficulté témoignent de la régularité de cette erreur quelque soit le contexte.

Les nombreuses erreurs en lien avec la transition entre l'arithmétique et l'algèbre mettent en évidence que les nouveaux apprentissages ne seront véritablement acquis que s'ils intègrent les connaissances antérieures des élèves. En effet, pour faire comprendre le sens des règles et des concepts algébriques, il est nécessaire de permettre aux élèves de les mettre en lien avec ce qu'ils savent déjà et de pouvoir les comparer.

D'après l'analyse que nous venons de faire, les erreurs effectuées par les élèves ne deviennent plus un dysfonctionnement de l'élève mais des « symptômes » que nous devons désormais identifier pour pouvoir y remédier. Les laisser émerger permettra aux élèves de les dépasser si l'enseignant est sensibilisé à ces difficultés liées à l'algèbre. Dans cette perspective, l'enseignement par situations-problèmes constitue une approche intéressante.

### **4.3. Le modèle socio-constructiviste**

Le courant socio-constructiviste s'est développé contre les approches transmissives et béhavioristes. Il fait l'hypothèse que les comportements mentaux jouent un rôle fondamental dans l'apprentissage, et s'inspire des travaux de recherches en psychologie, notamment ceux de Jean Piaget.

Selon ce modèle d'apprentissage, apprendre, c'est passer d'une conception ancienne à une conception nouvelle plus utile (Charnay et Mante, 2011). La nouvelle conception permet à l'élève de résoudre d'avantage de problèmes ou de les résoudre plus efficacement. Ce passage se fait par une remise en cause des connaissances anciennes. La stratégie d'apprentissage consiste à provoquer, chez l'élève, un conflit cognitif interne par une contradiction entre ses connaissances antérieures et un démenti. Ce démenti peut être amené par une situation ou par ses pairs (conflit socio-cognitif). Les situations de classe qui favorisent la mise en place de ce processus sont appelées des situations-problèmes.

Selon Charnay et Mante (2011), l'approche constructiviste a de nombreux avantages. Elle prend réellement en compte les connaissances initiales des élèves dans la phase introductive, en particulier leurs erreurs. C'est la seule approche qui pose la question du sens des connaissances. Cette approche développe aussi la socialisation des élèves: apprendre à écouter, prendre en compte l'avis de l'autre, s'entraider, argumenter.

#### 4.4. Les situations-problème

Les situations-problèmes sont plus larges et mieux calibrées que des problèmes d'application que nous proposons aux élèves pour entraîner des savoirs déjà institutionnalisés. Il s'agit d'alternatives aux cours eux-mêmes. Les situations-problèmes sont construites autour d'un obstacle à l'apprentissage, qui a été identifié et qu'il s'agira de franchir. Elles prennent comme point de départ un problème complexe à analyser, puis à résoudre autour de la pratique du « débat scientifique » dans la classe (Astolfi et al. 2008).

Selon Philippe Meirieu (1988), la pédagogie des situations-problèmes est opposée aux « pédagogies de la réponse » et aux « pédagogies du problème » :

*D'un côté. nous avons ce que, par simplification, nous pouvons appeler la « pédagogie de la réponse »: elle se contente de livrer des explications correctement agencées, elle fait des leçons qui, sans doute, à terme, permettront de résoudre des problèmes. (...)*

*À l'autre bout de l'échiquier pédagogique, on trouve ce que, pour simplifier à nouveau, nous nommons les « pédagogies du problème » : méthodes actives, pédagogie du concret ou du projet, elles se proposent de mettre l'élève face à une tâche susceptible de le mobiliser, et à l'occasion de laquelle on cherchera à lui faire effectuer des apprentissages précis. (...)*

*Tout l'effort de la pédagogie des situations-problèmes est d'organiser précisément l'interaction pour que, dans la résolution du problème, l'apprentissage s'effectue. Cela suppose que l'on s'assure, à la fois, de l'existence d'un problème à résoudre et de l'impossibilité de résoudre le problème sans apprendre »*

Dans ce type d'activité, l'élève est acteur de son propre apprentissage : il construit sa connaissance en agissant. Soit l'action aboutit au résultat attendu : Piaget parle alors d'*assimilation*; soit la tentative échoue : l'apprenant est en *déséquilibre*; l'élève est alors contraint à un réajustement, ce que Piaget appelle une *accommodation* (Charnay et Mante. 2011).

Une situation-problème se caractérise par un type de problème conçu pour que l'élève puisse s'engager dans sa résolution en investissant ses conceptions anciennes. Dans une deuxième phase, l'élève prend conscience de l'insuffisance de ses conceptions et, idéalement, la situation devrait lui permettre de construire de nouvelles connaissances pour résoudre le problème. Cette dernière partie peut être plus difficile à atteindre car nous ne connaissons pas de situations-problèmes pour l'enseignement de tous les concepts. Dans certaines situations, nous nous contenterons de donner du sens à de nouveaux concepts que nous enseignerons ensuite. Le fait que l'élève ait pris conscience de l'insuffisance de ses outils va faciliter l'apprentissage de nouveaux concepts, car désormais ils font sens pour lui. C'est par exemple le cas lorsque nous proposons un problème multiplicatif que l'élève ne peut résoudre avec l'addition itérée, car il y a beaucoup trop d'additions à effectuer (Bachelard, 1983).

Une situation-problème se caractérise aussi par une gestion de classe qui comporte plusieurs étapes; une première phase de travail individuel pour permettre à chacun de s'appropriier la situation à son rythme, suivie d'un travail en sous-groupes qui se termine avec une production commune. L'enseignant s'occupe alors d'animer une mise en commun de toutes les productions de la classe. Finalement, l'enseignant officialise les nouvelles connaissances que les élèves doivent maintenant acquérir et savoir utiliser lors d'une institutionnalisation.

En conclusion, dans le cadre de l'introduction à l'algèbre, l'apprentissage par des situations-problèmes permet de tenir compte des erreurs typiques liées à la transition du mode de pensée arithmétique vers le mode de pensée algébrique, de les mettre en évidence et de les dépasser. Les situations concrètes permettent aussi de donner du sens aux nouveaux concepts algébriques dès le début.

## 5. Méthodologie

La méthodologie envisagée dans ce travail est la recherche-action. Selon Saint-Luc (2010), cette méthode est un moyen de mettre en œuvre un développement professionnel en lien avec la recherche. Ainsi, elle permet de créer un lien plus étroit entre la théorie et la pratique, et également de construire des savoirs que les enseignants peuvent mettre en action.

Pour ce travail nous avons conçu une séquence d'enseignement sur le **calcul littéral** basé sur une approche socio-constructiviste avec comme objectif de donner du sens à l'algèbre. La séquence propose deux contextes (situations-problème) différents pour aborder les premiers apprentissages algébriques:

### L'algèbre par la géométrie

Sur la base d'expressions algébriques équivalentes (qui désignent une même aire ou périmètre) il s'agit de mettre en évidence quelques techniques de transformations d'expressions algébriques.

### Les problèmes de dénombrement (suites arithmétiques)

Ces types de situations-problèmes ont pour but de donner un caractère fonctionnel à l'algèbre. À travers l'élaboration de formules, l'algèbre apparaît comme un outil de généralisation.

#### 5.1. La classe 10VP/1

L'expérimentation de cette recherche a eu lieu dans une classe de 14 élèves en 10<sup>ème</sup> année HarmoS en voie pré-gymnasiale (VP)<sup>2</sup> de l'établissement primaire et secondaire d'Ollon (VD), où est employé l'étudiant. D'un point de vue des objectifs d'apprentissage, la VP est équivalente au niveau 3 du Plan d'Études Romand (PER). Dans ce cas, il s'agit d'une classe agréable, les élèves sont studieux et les problèmes de discipline sont mineurs.

---

<sup>2</sup> Sur le canton de Vaud, les élèves sont orientés en deux voies au début du cycle secondaire (9<sup>ème</sup> année HarmoS, 1<sup>ère</sup> année du Cycle d'Orientation sur le canton du Valais). La voie générale (VG) a pour but de préparer les élèves à leur entrée soit dans la formation professionnelle (apprentissage), soit en école de culture générale et de commerce, soit en école de maturité professionnelle. La voie pré-gymnasiale (VP) prépare progressivement les élèves qui se destinent principalement à des études de maturité gymnasiale.

Au sein de la classe il y a un élève qui bénéficie de mesures particulières en raison de sa dyslexie. Il a le droit de porter des lunettes de contraste en classe et il peut sortir du cours pour se reposer. Lors des évaluations sommatives, il peut demander la lecture à haute voix des consignes par l'enseignant et il a également droit à du temps supplémentaire pour finaliser les évaluations écrites. Il s'agit donc, d'une classe relativement homogène, avec néanmoins, trois élèves brillants qui font preuve d'une grande capacité d'analyse, et de deux élèves en difficulté dans le cours de mathématiques. De plus, le groupe classe est habitué à travailler en sous-groupes, cette forme sociale de travail permet souvent de combler l'hétérogénéité de la classe.

Dans notre établissement, il existe une deuxième classe parallèle du même niveau (la 10VP/2). Dans ces situations la collaboration au sein de l'équipe pédagogique et la passation d'évaluations communes est une pratique courante et encouragée par la direction de l'école. Ainsi, les deux classes ont suivi un programme identique et passé les mêmes évaluations durant toute l'année. Cette contrainte est à la fois un handicap pour le déroulement de la séquence, notamment à cause d'une évaluation imposée par l'équipe pédagogique mais également une opportunité pour évaluer la faisabilité de ce type d'enseignement dans le cadre de l'école publique.

## 5.2. Objectifs de la séquence

Dans la progression des apprentissages, le PER demande d'aborder les objectifs sur le calcul littéral avant les équations et les fonctions.

### **Objectifs généraux selon le PER (MSN-33) :**

Résoudre des problèmes numériques et algébriques en reconnaissant les caractéristiques mathématiques d'une situation, en la traduisant en écritures numériques ou littérales et en mobilisant l'algèbre comme outil de calcul, de preuve ou de généralisation.

### **Objectifs spécifiques :**

- Connaissance et utilisation des règles et conventions d'écriture algébrique
- Détermination de la valeur numérique d'une expression littérale



- Élaboration d'expressions littérales à partir d'énoncés de problèmes, de figures géométriques ou d'expressions verbales
- Interprétation d'expressions littérales et identification de celles qui sont équivalentes
- Connaissance de la terminologie, écriture réduite et ordonnée de monômes à coefficients entiers, au plus trois indéterminées ( $\text{degré} \leq 6$ )
- Addition, soustraction et multiplication de monômes et de polynômes

### 5.3. Planification de la séquence

Le tableau 1 résume la planification générale de la séquence et les activités principales qui ont été mises en place pour ce travail de recherche. Il s'agit d'une séquence de type socio-constructiviste, où deux situations-problèmes permettent d'aborder les concepts algébriques en lien avec les objectifs.

### 5.4. Analyse a priori de la situation-problème 1 (algèbre par la géométrie)

L'algèbre par la géométrie propose une représentation concrète des concepts impliqués dans les premières procédures algébriques (sens de l'égalité, réduction des termes semblables,...). Les élèves construisent leurs premières représentations algébriques sur des connaissances géométriques qui leur sont familières.

#### Objectif

L'objectif principal de cette activité est de donner du sens aux premières expressions algébriques. La situation présente plusieurs lettres, des sommes et produits de monômes et des polynômes du second degré. Cette situation permet aux élèves d'aborder les concepts suivants:

- la notion d'**expression algébrique**, comme écriture de l'aire de figures géométriques
- l'**égalité**, comme relation existante entre deux expressions représentant le même objet. Lors de la mise en commun nous pourrions valider deux expressions différentes pour le même objet puis déduire qu'elles sont « égales ».

Lors de cette activité, les élèves vont rencontrer la réduction de termes semblables, la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et la convention pour omettre le signe « . ».

Phase	Activité	Description
1	QSJ p.105	Ev. Diagnostique Travail individuel à rendre, correction par l'enseignant
2	QSJ p.105	Retour du QSJ En fonction des erreurs des élèves
3	SP-1	Situation-problème 1 (géométrie) - donner du sens aux expressions algébriques et découverte d'une nouvelle notion du signe d'égalité - en groupes de 3, ils rendent leur production à la fin
4	SP-1	Mise en commun en fonction des résultats
5	SP-1	Institutionnalisation sous forme de fiches « aide mémoire » à partir des conclusions de la mise en commun.
6	Exercices	Une feuille de route avec des exercices sélectionnés dans les ouvrages de mathématiques 9-10-11 Travail individuel en autonomie
7	SP-2	Situation-problème 2 (dénombrement) - donner du sens à l'algèbre comme outil de généralisation, la lettre devient variable, effectuer des manipulations algébriques, modéliser une situation - en groupes de 3, ils rendent leur production à la fin
8	SP-2	Mise en commun en fonction des résultats
9	SP-2	Institutionnalisation sous forme de fiches « aide mémoire » à partir des conclusions de la mise en commun.
10	Exercices	Une feuille de route avec des exercices sélectionnés dans les ouvrages mathématiques 9-10-11 Travail individuel en autonomie
11	Jeux	Jeux de cartes à faire en petits groupes d'élèves (2-3) pour améliorer la maîtrise des opérations de base du calcul littéral Expressions algébriques ciblés sur les erreurs typiques des élèves
12	FLP p.114	Ev. Formative - Travail individuel avec autoévaluation à partir d'un corrigé et des indicateurs sur les objectifs atteints ou pas
13	Test	Ev. Sommative - Examen individuel écrit, élaboré en collaboration avec les autres enseignants du même niveau.

Tableau 1: Planification générale de la séquence

## Prérequis

- La notion d'aire (surface d'une figure)
- La notion de périmètre (le contour d'une figure)
- Les opérations et conventions relatives au calcul numérique (priorité des opérations, parenthèses,...).

## Procédures correctes des élèves

Les solutions correctes pourront être obtenues à partir de

- La manipulation des figures (découper, déplacer, superposer,...)
- Calculs avec les mesures réelles des segments
- Calculs avec des expressions algébriques, soit en vérifiant l'équivalence des expressions par substitution des nombres, soit en comparant les expressions directement.

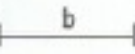
## Difficultés possibles des élèves

- Les élèves déterminent que la longueur  $a$  est un multiple de la longueur  $b$ , puis ils continuent en fonction d'une seule grandeur
- Les élèves confondent l'aire et le périmètre
- Les élèves pensent que les deux rectangles blancs au centre sont égaux
- Les élèves manquent de précision dans la décomposition des figures et ceci entraîne des erreurs de calcul.

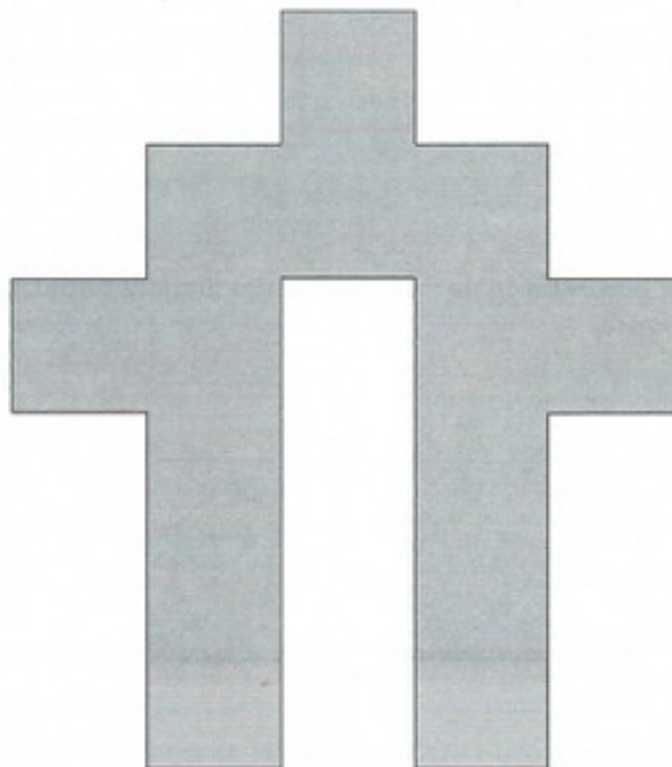
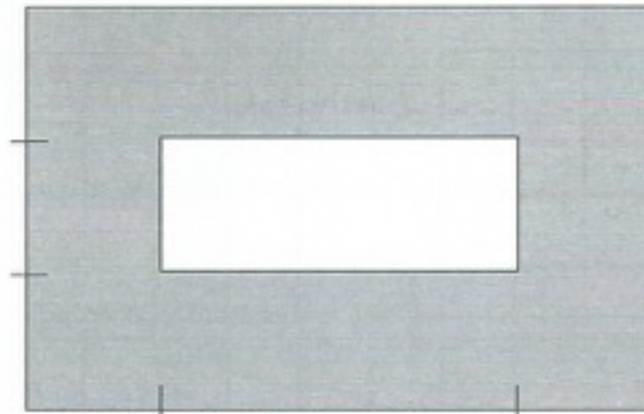
## Mise en commun

La mise en commun doit permettre aux élèves d'argumenter, de confronter leurs solutions et de voir ainsi qu'il y a différentes manières de résoudre un problème. Il s'agit donc de faire émerger les différentes solutions, de faire expliquer aux élèves leurs propres raisonnements, de faire valider les différentes productions et finalement de mettre en évidence les nouveaux concepts **en fonction des productions des élèves** (s'ils n'ont pas produit le matériel pour aborder les concepts attendus, une autre situation-problème sera proposée). Les nouveaux concepts qui devraient potentiellement émerger de cette situation-problème sont:

Le périmètre des figures n'est constitué que de segments

de longueur  $b$  : 

de longueur  $a$  : 



Les parties ombrées des deux figures suivantes ont-elles la même aire?  
Expliquez votre raisonnement.

Figure 2: consigne de la situation-problème 1. Inspiré de Vlassis et Demonty (2002)

temps	Activité	FST	Détails
1	Introduction	frontal	L'enseignant introduit l'activité: - travail en groupe - feuille à rendre à la fin
3	lecture de l'énoncé	individuel	Exercice projeté à l'écran, chaque élève lit la consigne en silence
5	MEC consigne	discussion ouverte	- Ne pas orienter les élèves dans les procédures - S'assurer de la compréhension de la situation - l'explication du raisonnement avec des phrases
3	Formation des groupes	frontal	- Éteindre le beamer pour attirer l'attention - Chaque élève prépare son matériel et range le reste - Écrire au TN l'heure de la fin du travail - L'enseignant donne les membres des sous-groupes qui se forment - Distribuer les feuilles
20	Résolution du problème	En sous groupes de 2-3 élèves	- Ne pas intervenir sauf erreurs d'inattention comme Aire vs. périmètre - Encourager les élèves à expliquer leurs pensées - Rappeler le temps régulièrement - Ramasser les feuilles à la fin (noms)

Tableau 2: Planification de la situation-problème 1

- le sens de l'égalité et comment l'utiliser
- le sens de la lettre dans le contexte géométrique (un seul nombre)
- comment vérifier que deux expressions algébriques sont équivalentes
- les conventions d'écriture (omission du signe « . » ou ordre des lettres/monômes)
- la réduction de polynômes
- la distributivité de la multiplication sur l'addition

### 5.5. Exercices de consolidation

La séquence planifiée inclut une série d'exercices de consolidation que les élèves font après l'institutionnalisation des savoirs. Les élèves font les exercices de manière individuelle et autonome, avec un corrigé à disposition des élèves. L'enseignant et les élèves suivent leur progression dans un tableau récapitulatif pour l'ensemble de la classe.

## 5.6. Évaluation

Lors de la séquence plusieurs évaluations instrumentées ont été planifiées et effectuées. Notamment une évaluation formative avec auto-évaluation et une évaluation sommative à la fin de la séquence.

### Évaluation formative

Une semaine avant l'évaluation sommative, les élèves font une auto-évaluation formative. La fiche « *Faire le point* » des ouvrages Mathématiques 9-10-11 accompagnée d'un corrigé et d'un tableau récapitulatif (voir annexe) permet aux élèves d'évaluer la progression de leurs apprentissages en lien avec chaque objectif de la séquence. En fonction des résultats, l'enseignant propose une remédiation individualisée à chaque élève.

### Évaluation sommative

Une évaluation sommative a lieu à la fin de la séquence. Cette évaluation a été élaborée par l'équipe pédagogique de mathématiques de 10H. Elle a un caractère très semblable aux évaluations des années précédentes. L'évaluation teste 3 objectifs:

- Détermination de la valeur numérique d'une expression littérale en substituant des nombres aux lettres (item 1; 6 points)
- Addition, soustraction et multiplication de monômes et polynômes (items 2 et 3; 12 points)
- Élaboration d'expressions littérales à partir de figures géométriques (items 4 et 5; 10 points)

Le seuil de réussite a été fixé à 17 points sur 28 (61%). L'attribution des notes de 1 à 6 a été réalisée avec une régression linéaire comme il est exigé dans le Cadre Générale de L'Évaluation (CGE, 2015). Dans cette évaluation, les opérations purement techniques ont une pondération plus importante.

### Épreuve Cantonale de Référence (ECR)

Sur le canton de Vaud, en complément de l'évaluation pratiquée au sein de la classe, les ECR permettent de situer les résultats obtenus par les élèves ou les établissements scolaires par rapport à la moyenne du canton.

Ces épreuves sont standardisées, tout comme les conditions de passation, les modalités de correction et le barème. Les ECR sont conçues en collaboration avec des groupes de travail composés d'enseignants, encadrés par des didacticiens de la Haute école pédagogique de Lausanne (HEPL).

La classe 10VP/1 a effectué l'ECR de mathématiques 3 mois après le déroulement de la séquence sur l'algèbre. Les objectifs en lien avec l'algèbre étaient évalués dans trois items de l'ECR, d'abord un exercice avec une série d'expressions littérales à réduire (technique) et deux problèmes dans lesquels les élèves devaient élaborer des expressions littérales à partir d'énoncés de problèmes et de figures géométriques.

Les résultats des élèves lors de l'évaluation sommative en fin de séquence et à l'ECR seront comparés afin de déterminer l'acquis des élèves à moyen terme.

## 6. Résultats

### 6.1. Situation-problème 1

Les moments phare de la séquence sont autour des deux situations-problèmes; c'est-à-dire, le déroulement des travaux de groupes et les mises en commun effectuées postérieurement. Les élèves ont participé activement et ont fourni une diversité de résultats permettant la mise en lumière de quelques propriétés algébriques et l'utilité de cette branche des mathématiques.

Tous les élèves ont répondu à la question de manière adéquate. Les procédures mises en place par les élèves sont très variées, à savoir:

- manipulation des figures, les élèves ont découpé et déplacé des parties des figures et les ont ensuite comparées
- calculs des aires avec les mesures réelles des segments
- élaboration d'expressions algébriques et vérification en substituant la valeur mesurée des variables
- élaboration d'expressions algébriques et vérification en comparant directement les expressions.

Lors de la mise en commun, chaque groupe a présenté à tour de rôle sa production, et l'enseignant a noté au tableau les expressions algébriques produites par les élèves pour chaque figure. À la fin des présentations, pour lancer le débat, l'enseignant a demandé à la classe: « *voici toutes vos réponses, qui a trouvé la bonne réponse ?* ». Les élèves ont répondu « *tout le monde* », car tous les groupes avaient répondu que « *les figures ne sont pas identiques* ». L'enseignant a alors mis en évidence que pour chaque figure il y avait des expressions algébriques différentes (tableau 3), puis un travail de comparaison a suivi dans lequel les expressions ont été analysées une à une et comparées à celles de leurs pairs.

Grâce à cette mise en commun, différents savoirs algébriques ont été déduits, notamment ; l'addition de monômes, la multiplication de monômes, la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, le concept d'égalité et l'omission du signe «  $\cdot$  ».

	<b>figure 1</b>		<b>figure 2</b>
A	$3b \cdot (2b + a) - b \cdot a$	E	$2b \cdot 4b + b \cdot a \cdot 2$
B	$(a + b + b) \cdot (b + b + b) - a \cdot b$	F	$b \cdot b \cdot 8 + a \cdot b \cdot 2$
C	$3b \cdot (a + 2b) - a \cdot b$	G	$(b \cdot b \cdot 8) + (a \cdot b \cdot 2)$
D	$6b^2 + 2ab$	H	$8b^2 + 2ab$

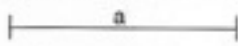

**Tableau 3: Expressions algébriques issues de la situation-problème 1**

En comparant les expressions E, F et H du tableau 3, concernant la figure 2 de la situation-problème 1, on peut montrer que premièrement  $2b \cdot 4b = b \cdot b \cdot 8 = 8b^2$  et deuxièmement  $b \cdot a \cdot 2 = a \cdot b \cdot 2 = 2ab$ . Donc, les expressions E, F, G et H sont équivalentes.

Pour la figure 1 de la situation-problème 1, en comparant les expressions B et C, on trouve  $b + b + b = 3b$  et  $a + b + b = a + 2b$ . Puis, en comparant les expressions A et D on a pu montrer que  $3b \cdot (2b + a) = 6b^2 + 3ab$ , et que les expressions A, B, C et D sont équivalentes.




Le périmètre des figures n'est constitué que des segments

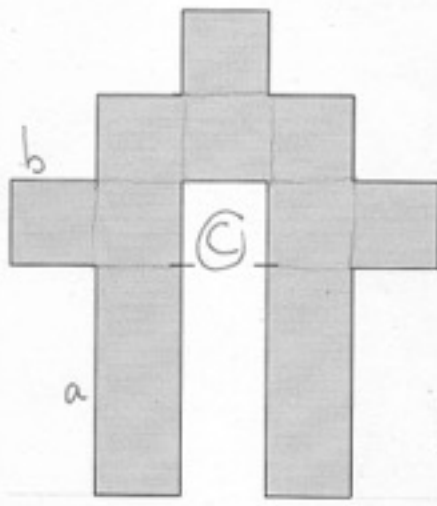
- de longueur a : 
- de longueur b : 

A forme grise :  $(a + 2b) \cdot 3b - ab$  *grand rectangle*  
 $A' = (a + 2b) \cdot 3b$

*A petit rectangle ab*



A carés :  $8b^2 \dots$   
A rectangles :  $2ab$



A total  $8b^2 + 2ab$

Les parties ombrées des deux figures ont-elles la même aire ?  
Expliquez votre raisonnement.

$\textcircled{R}$  - 6 carés ( $b^2$ )  
- 2 rectangles ( $ab$ )

$\textcircled{C}$  8 carés ( $b^2$ )  
2 rectangles ( $ab$ )

*L'air est différente car :  
Il y a le même nombre de rectangle dans chacune des deux formes mais il y a 2 carés de plus dans la forme C; donc l'air de C est supérieur à celle de R*

Figure 3: Situation-problème 1: exemple d'une production d'élève.

## Évaluation sommative en fin de séquence

La performance des élèves lors de l'évaluation sommative à la fin de la séquence est plus faible que pour les autres évaluations de l'année. En effet, la moyenne des notes est de 4.14 sur 6 pour l'évaluation de la séquence et la moyenne des notes de l'année était de 4.55 sur 6. Par rapport à la classe parallèle la performance est inférieure également. La moyenne des notes de la classe parallèle était de 4.35 sur 6.

La partie « technique » (items 2 et 3) de l'évaluation a posé davantage de difficultés que la partie « problèmes » (items 4 et 5). En prenant comme critère de réussite l'obtention de 60% des points, la partie technique est réussie par la moitié des élèves, 7 élèves sur 14, tandis que la partie problèmes est réussie par la majorité des élèves, 12 élèves sur 14 (figure 4).

Le fait que la partie technique ait une pondération plus importante a influencé sur la note globale de l'évaluation sommative.

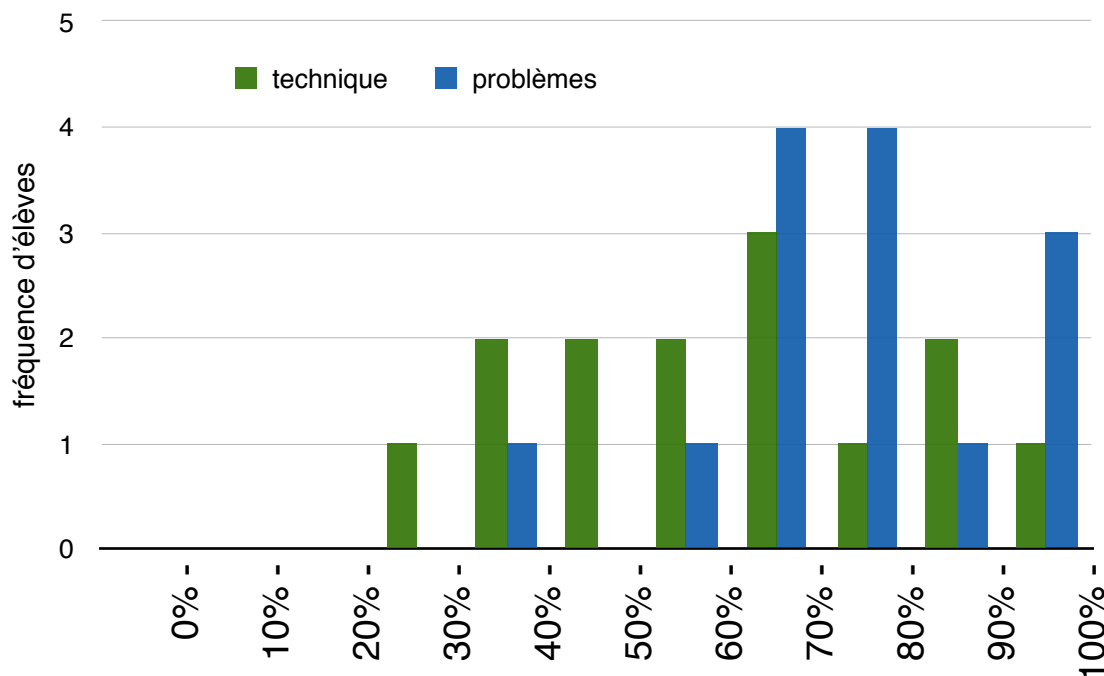


Figure 4: Résultats lors de l'évaluation sommative en fin de séquence. Le nombre d'élèves en fonction du pourcentage de points obtenu dans chaque partie de l'évaluation.

## Épreuve Cantonale de Référence

La différence du nombre d'élèves ayant réussi la partie technique par rapport à la partie problèmes s'est nettement accentuée à l'ECR (figure 5). Seulement 3 élèves sur 14 ont réussi la partie technique, tandis que la majorité des élèves a réussi la partie problèmes, soit 10 élèves sur 14.

Trois mois après la séquence, la majorité des élèves a intégré l'apprentissage en lien avec l'élaboration d'expressions algébriques à partir de figures géométriques ou d'énoncés de problèmes. Par contre, l'apprentissage en lien avec les opérations techniques de calcul littéral a été « oublié » par les élèves. En effet, seul 3 élèves sur 14 sont capables de réussir cette partie.

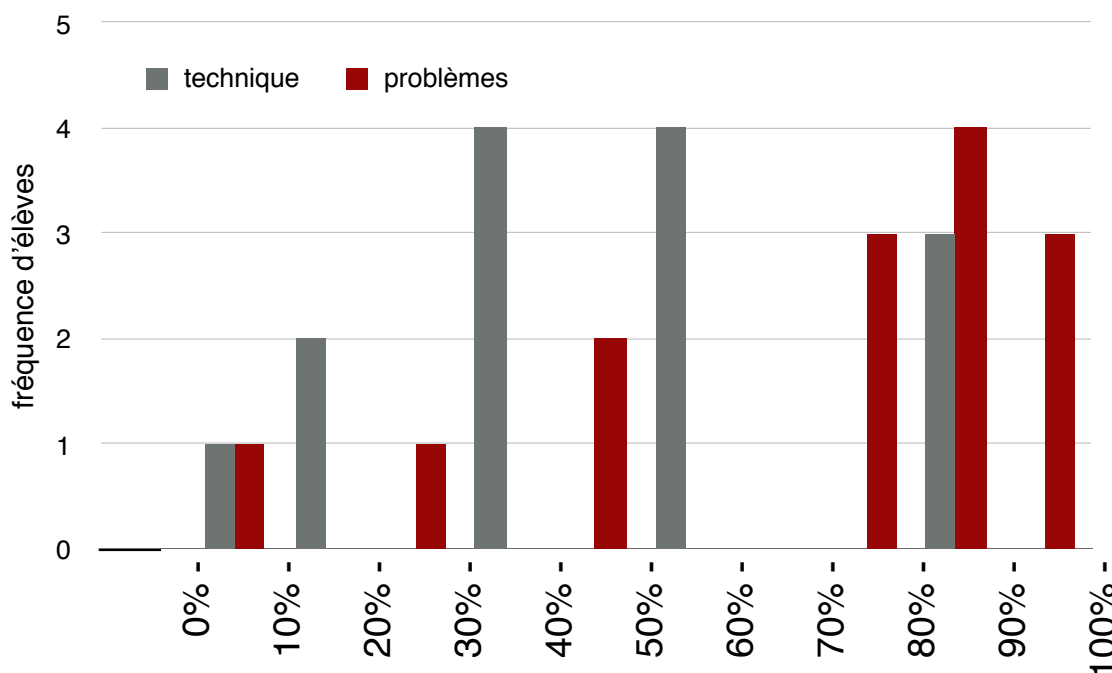
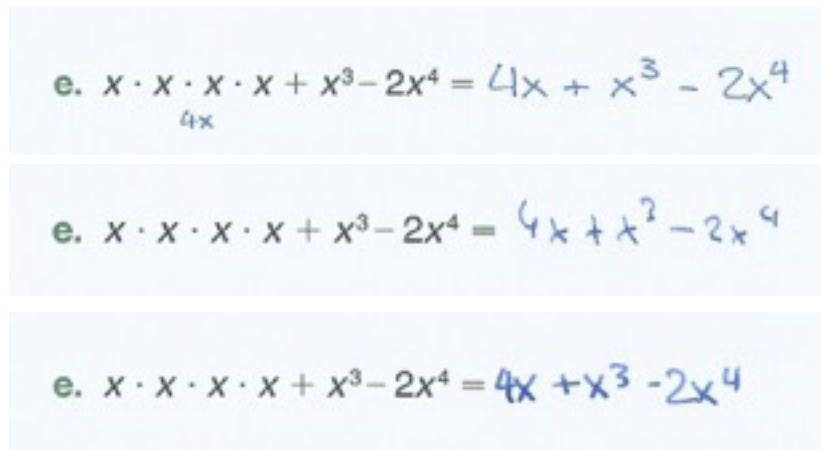


Figure 5: Résultats lors de l'ECR. Le nombre d'élèves en fonction du pourcentage de points obtenu dans chaque partie de l'évaluation. Un élève (les deux premières colonnes à gauche) n'a pas fait l'exercice, l'auteur ignore s'il s'agit de méconnaissance du sujet ou d'un manque de temps.

## 6.2. Analyse des erreurs

Les erreurs les plus fréquentes sont en lien avec les puissances, la priorité des opérations et la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Les erreurs en lien avec la réduction de monômes semblables sont négligeables.

En ce qui concerne les puissances, une erreur récurrente est observée lors de la multiplication d'un même monôme plusieurs fois comme «  $x \cdot x \cdot x \cdot x = 4x$  » (figure 5). La proportion des erreurs augmente quand on rencontre peu de coefficients numériques ou d'expressions littérales en plus de la répétition de la lettre. Les élèves réfléchissent par analogie et fondent leur raisonnement sur ce qu'on appelle des « *similarités superficielles* » (Gentner 1989). C'est à dire, des indices semblables à une situation déjà rencontrée mais qui ne sont pas pertinents pour résoudre le problème posé. Dans le cas de «  $x \cdot x \cdot x \cdot x$  », seule la répétition de la lettre est prise en considération ce qui entraîne l'erreur pour les élèves de retenir « 4 fois x ». Le signe opératoire, la « *multiplication* », n'est pas tenu compte par l'élève.



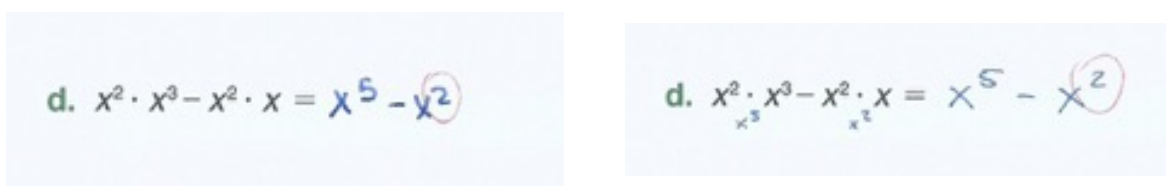
e.  $x \cdot x \cdot x \cdot x + x^3 - 2x^4 = 4x + x^3 - 2x^4$   
4x

e.  $x \cdot x \cdot x \cdot x + x^3 - 2x^4 = 4x + x^2 - 2x^4$

e.  $x \cdot x \cdot x \cdot x + x^3 - 2x^4 = 4x + x^3 - 2x^4$

Figure 5: Erreur à cause des « *similarités superficielles* »

Toujours en lien avec les puissances, certains élèves ont négligé la convention de ne pas noter l'exposant de la puissance « 1 » (figure 6) et ils ont commis des erreurs en appliquant la propriété d'additionner les exposants lors de la multiplication de deux monômes avec la même base, par exemple : «  $x^3 \cdot x^2 = x^5$  » (car  $3 + 2 = 5$ ) mais dans le même calcul «  $x^2 \cdot x = x^2$  » (car  $2 + 0 = 2$ ).



d.  $x^2 \cdot x^3 - x^2 \cdot x = x^5 - x^2$

d.  $x^2 \cdot x^3 - x^2 \cdot x = x^5 - x^2$

Figure 6: Erreur à cause de la négligence sur convention de ne pas noter l'exposant « 1 »

La distributivité a posé problème à une bonne partie des élèves, notamment pour distribuer le signe « - » (figure 7). Le fait qu'il n'y ait pas de nombre à multiplier devant la parenthèse perturbe les élèves qui ne portent pas la distributivité ou que ne la portent que sur le premier terme.

$$b. 4x^3 - (4x - 2y + 7x^3) + 3y = 4x + y + 11x^3$$

$$b. 4x^3 - (4x - 2y + 7x^3) + 3y = 11x^3 + 1y + 4x$$

Figure 7: Erreur de distributivité du signe « - »

Dans la partie problèmes, les expressions algébriques sont correctes pour la plupart des élèves. Ainsi, dans l'item « L'aire d'un rectangle » de l'ECR, 13 élèves sur 14 ont donné l'expression  $5x \cdot x$ , puis, trois élèves se sont trompés dans la multiplication.

Dans l'item « Hangar », 4 élèves ont trouvé la bonne réponse et 6 élèves ont effectué des calculs algébriques cohérents malgré des problèmes à représenter le volume et les faces du bâtiment (figure 8).

Diagram of a rectangular prism (hangar) with dimensions  $x$ ,  $15\text{m}$ , and  $5\text{m}$ .

Calculations:

- ①  $15x$  ✓ (Area of front face)
- $(15x) \cdot 3 = 45x$  (Area of 3 sides)
- ②  $5x$
- $(5x) \cdot 2 = 10x$  ✓ (Area of side face)

Total area to be painted:  $15x + 10x - 7\text{m}^2 = 25x - 7\text{m}^2$

Final answer:  $55x - 7\text{m}^2$

Figure 8: On observe une erreur de représentation du volume et des faces du parallélépipède, néanmoins la partie algébrique est correcte.

## 7. Discussion

Les résultats de ce travail montrent qu'introduire l'algèbre par des situations-problèmes est un moyen efficace de présenter les différents concepts algébriques que les élèves ont tant de difficulté à acquérir au début du secondaire. Comme nous l'avons vu, ces situations ont permis aux élèves de déduire par eux même plusieurs opérations algébriques comme l'addition ou la multiplication de monômes ou encore la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

Lorsque les élèves sont confrontés à des problèmes présentés dans le contexte d'une situation, leur performance est meilleure que lorsqu'ils doivent résoudre des exercices techniques de calcul littéral. Cette différence s'est même accentuée trois mois après la séquence. Les élèves ont eu des difficultés à se confronter aux expressions algébriques dans un contexte technique qui les rendait trop abstraites, alors que face à une situation concrète, ils ont utilisé l'algèbre comme un outil pour résoudre le problème.

Une raison qui pourrait expliquer cette différence est l'introduction trop précoce des opérations algébriques dans cette séquence. En effet, la distributivité représente un saut conceptuel très important qu'une partie des élèves ne peut pas surmonter sans se référer à un objet concret, comme par exemple une figure géométrique.

Introduire le calcul littéral avant les équations et les problèmes géométriques comme cela est préconisé par les découpages officiels et les ouvrages peut alors se révéler contre-productif, car les élèves n'arrivent pas à avoir une conception appliquée des expressions algébriques. Par exemple, un des objectifs du PER en 10 H est :

*« [la] connaissance de la terminologie, écriture réduite et ordonnée de monômes à coefficients entiers, au plus trois indéterminées (degré  $\leq 6$ ). »*

Il paraît évident que les élèves du secondaire auront des difficultés à représenter ces expressions alors qu'ils sont en pleine constructions des conceptions algébriques.

D'après les résultats présentés ci-dessus, les élèves ont pu mobiliser le savoir faire algébrique dans le contexte d'un problème. Ensuite, ils ont été capables d'aborder une séquence sur les équations qui a été bien réussie par la majorité des élèves. Le calcul littéral, tel qu'il est proposé en 9H et 10H se révèle donc inutile voire contre-productif car les élèves n'ont pas besoin de cet apprentissage théorique pour représenter des figures géométriques ou pour résoudre des équations de premier degré. De plus, cette manière de faire provoque des erreurs en troublant le mode de pensée algébrique.

Nous pouvons donc conclure que l'algèbre peut être abordée à partir de situations-problèmes sans une base « forte » de calcul littéral. Dès lors, il serait intéressant de tester une autre manière d'aborder les objectifs algébriques du secondaire en inversant la progression des apprentissages proposée dans le PER:

- 9H : L'élaboration d'expressions algébriques à partir de figures géométriques et énoncés de problèmes. En soulignant des concepts tels que le signe « = » et le sens des lettres tel qu'il est proposé dans ce travail.
- 10H : Résolution de problèmes en faisant recours à des équations de premier degré à une inconnue.
- 11H : Calcul littéral, puis, équations de deuxième degré et systèmes d'équations.

Cette progression des apprentissages permettrait à l'élève de donner du sens à l'algèbre et de faire une transition entre l'arithmétique et l'algèbre de manière plus graduelle.

Notons néanmoins, que lors de la séquence présentée, des contraintes liées à l'école, en tant qu'institution, ont mis des freins à une application correcte de la méthode. Premièrement le contenu de l'évaluation sommative était imposé et peu adapté à l'apprentissage que les élèves ont suivi, car elle donnait une pondération plus importante à la partie « technique ». Cette mesure garantit des critères d'égalité de traitement entre les élèves d'une même école. Par contre, elle limite la marge de manœuvre des enseignants pour adapter leur enseignement aux élèves en fonction des situations.

Deuxièmement, l'organisation des séquences est fortement guidée par la DGEO<sup>3</sup> afin d'assurer les changements de voies et de niveaux des élèves et pour la coordination des différentes branches, notamment les Sciences de la Nature et l'option spécifique Mathématiques et Physique<sup>4</sup>. La présence de l'ECR en 10H exige aussi d'avoir abordé le calcul littéral au début de l'année.

Finalement, les classes parallèles exigent une collaboration étroite au sein de l'équipe pédagogique. Les mesures et les idées proposées dans ce travail n'auraient pas pu avoir lieu sans l'ouverture et la participation de tous les enseignants.

Cette étude s'est limitée à une classe de 14 élèves de niveau 3. Il s'agit d'un échantillon très réduit et non représentatif de la population d'élèves que nous rencontrons dans les écoles Suisses. L'extrapolation de ces résultats à d'autres contextes est donc à faire avec précaution. Néanmoins, les conclusions et idées présentées ici peuvent être une source d'inspiration pour d'autres projets afin d'élargir les connaissances actuelles sur le sujet.

---

<sup>3</sup> Direction générale de l'enseignement obligatoire du Canton de Vaud.

<sup>4</sup> L'option spécifique Mathématiques et Physique est un cours à option proposé aux élèves de la voie pré-gymnasiale sur le canton de Vaud. Il est nécessaire d'établir une collaboration étroite dans les établissements entre l'enseignement des mathématiques de base, des sciences et de l'option spécifique afin de planifier les sujets communs. Le cours de base se charge de l'introduction et l'option spécifique permet d'approfondir certaines notions de manière plus rigoureuse.



## 8. Bilan et conclusion

Ce travail met en évidence l'importance de tenir compte du passé des élèves et de la manière dont les concepts mathématiques sont construits chez l'enfant. La logique et la structure des savoirs que nous avons en tant qu'adultes ne correspondent pas forcément à celle des enfants. Nous devons alors repenser la manière dont nous proposons les apprentissages à nos élèves.

La question de la relation entre la théorie et la pratique dans le monde de l'enseignement n'est pas nouvelle. De nombreuses raisons ont été proposées pour expliquer ce fossé, mais cette question a surtout été abordée sous l'angle de la recherche et de ses liens avec l'action (Dietrich et Weppe, 2011).

Une des contraintes qui a été abordée dans ce travail est celle de l'école comme institution, car la mise en pratique des théories ne dépend pas seulement de l'enseignant et des élèves mais de l'ensemble des acteurs présents autour de l'enfant. En ce qui concerne les méthodes d'enseignement et l'organisation des programmes, l'équipe pédagogique et les instances supérieures jouent un rôle qui ne doit pas être négligé.

Comme proposé, à l'avenir, une plus grande coordination de l'équipe pédagogique dès la 9H pourrait donner des résultats positifs. L'enseignement ne peut pas être conçu comme une approche individuelle de chaque acteur, mais comme un ensemble cohérent de tâches et d'acteurs qui partagent les mêmes buts.

Ce travail montre qu'il est possible d'enseigner l'algèbre d'une autre façon dans l'école publique et que ceci permet aux élèves d'aborder ce sujet tant redouté de manière plus sereine et durable.

## 8.1. Apport personnel de la recherche sur mon développement professionnel

D'un point de vue personnel, ce travail m'a permis d'expérimenter de nouvelles méthodes de travail en classe. Les mises en commun avec les élèves ont été très enrichissantes, la liberté d'action donnée aux élèves s'est traduite par une palette de résultats très variés qui montre leur créativité et leur inventivité. L'explicitation des démarches effectuées par les élèves pour répondre aux situations proposées donne à l'enseignant des informations précieuses sur la manière dont chacun a de construire ses savoirs. À travers la séquence, j'ai appris à connaître mes élèves et à les observer travailler avec un regard différent. Je suis ainsi mieux préparé pour les accompagner dans leurs apprentissages. D'un point de vue purement didactique, cette étude était un exercice stimulant et le travail effectué sera certainement réinvesti dans l'avenir.

Mon parcours en tant qu'enseignant débutant a été jalonné de succès comme d'échecs. Pouvoir en identifier les causes est une étape fondamentale pour améliorer notre pratique personnelle. La recherche contribue à cela en proposant une méthodologie structurée afin de donner des réponses à nos questions. Pour cela, la recherche n'est pas seulement une « *action* » mais un état d'esprit. Au terme d'une recherche il y a toujours de nouvelles questions qui émergent et de nouvelles possibilités d'apprentissage qui s'ouvrent. C'est grâce à ce cheminement que le savoir actuel s'est construit et que nouveaux savoirs se développent.

## 9. Bibliographie

- Astolfi, J., Darot, É, Ginsburger-Vogel, Y., & Toussaint, J. (2008). Mots-clés de la didactique des sciences: Repères, définitions, bibliographies. Paris: De Boeck université.
- Bachelard, G. (1983). La formation de l'esprit scientifique. Paris: J. Vrin.
- Bkouche, R., Charlot, B., & Rouche, N. (1991). Faire des mathématiques: Le plaisir du sens. Paris: A. Colin.
- Canton de Vaud. (2015). Cadre générale de l'évaluation. Lausanne: DFJC - Direction générale de l'enseignement obligatoire.
- Charnay, R., & Mante, M. (2011). Mathématiques épreuve orale d'admission. Paris: Hatier.
- CIIP Conférence intercantonale de l'instruction publique de la Suisse romande et du Tessin. (2012). Mathématiques 9-10-11. Lausanne, Suisse: LEP Editions Loisir et Pédagogie.
- CIIP Conférence intercantonale de l'instruction publique de la Suisse romande et du Tessin. (2010). Plan d'Etudes Romand. Lausanne, Suisse: LEP Editions Loisir et Pédagogie.
- Gentner, D. (1989). The mechanisms of analogical learning. In S. Vosniadou and A. Ortony, Similarity and analogical reasoning. Cambridge: Cambridge University Press, 199-241.
- Dietrich, A., & Weppe, X. (2011). Les frontières entre théorie et pratique dans les dispositifs d'enseignement en apprentissage. Management & Avenir, (10), 35-53.
- Meirieu, P. (1988). Apprendre... oui, mais comment. Paris: ESF.
- Saint-Luc, F. (2010). Éducation et formation des enseignants en Finlande: la place des pédagogies actives et coopératives. Spécificités, (1), 217-230.

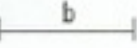
- Vlassis, J., & Demonty, I. (2000). Stratégies d'enseignement de l'algèbre. Epreuve d'algèbre destinée aux élèves de deuxième secondaire: Résultats de population. Liège, Belgique: Service de Pédagogie expérimentale de l'Université de Liège.
- Vlassis, J., & Demonty, I. (2002). L'algèbre par des situations-problèmes au début du secondaire. Bruxelles: De Boeck.
- Wagner, S., Rachlin, S. L., & Jensen, R. J. (1984). Algebra learning project: Final report. Athens: University of Georgia, Department of Mathematics Education.

## 10. Annexes

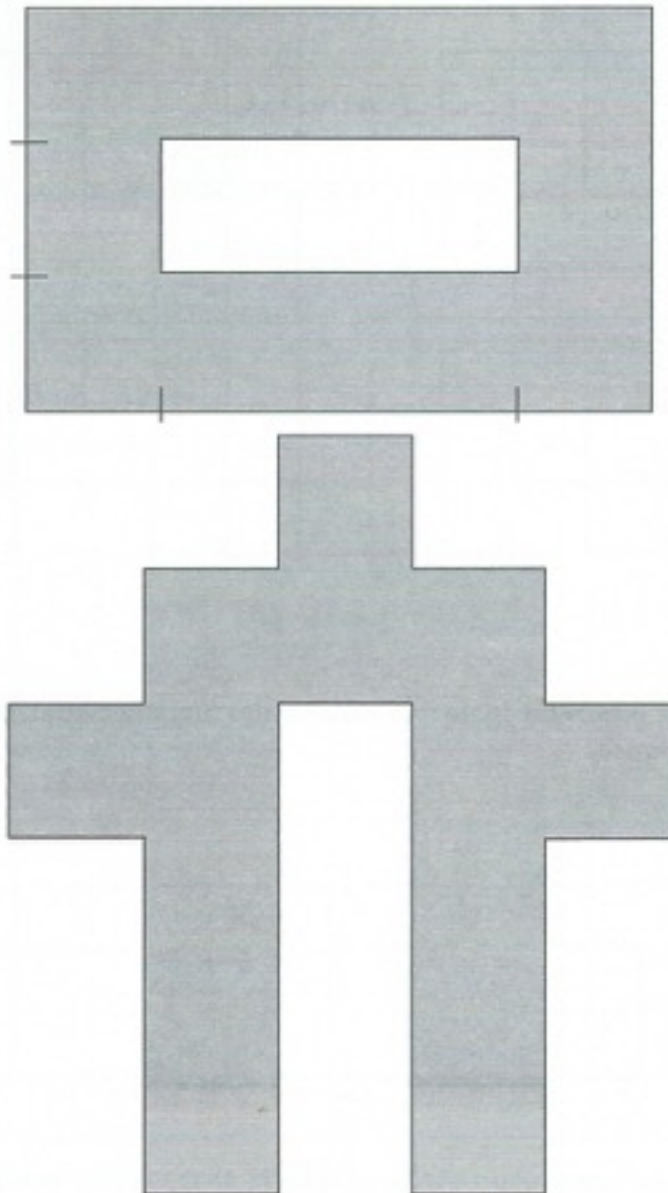
- A. Énoncé de la situation-problème 1
- B. Énoncé de la situation-problème 2
- C. Auto-évaluation formative
- D. Évaluation sommative en fin de séquence
- E. Items de l'Épreuve Cantonale de Référence
- F. Productions des élèves lors de la situation-problème 1
- G. Productions des élèves lors de la situation-problème 2

## A. Énoncé de la situation-problème 1

Le périmètre des figures n'est constitué que de segments

de longueur  $b$  : 

de longueur  $a$  : 

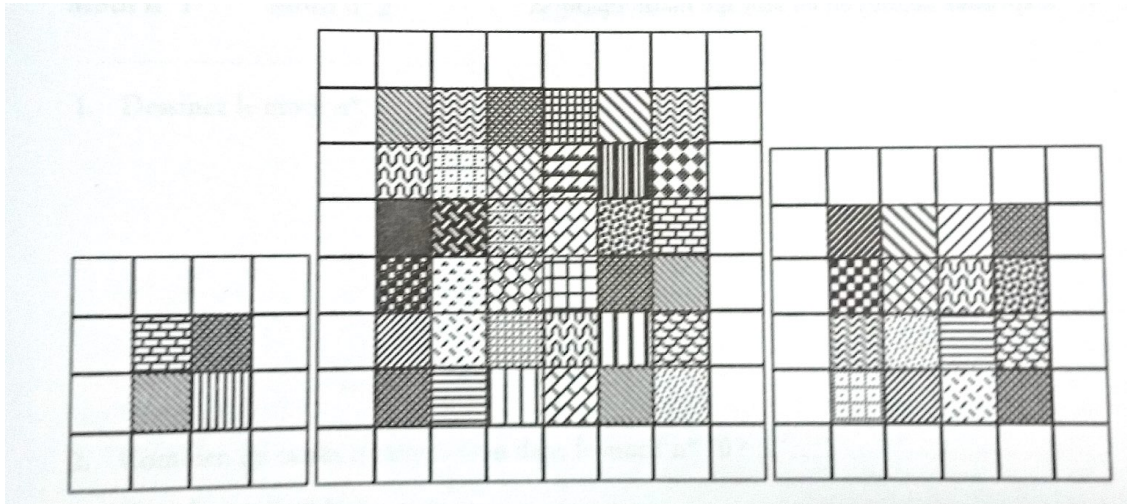


Les parties ombrées des deux figures suivantes ont-elles la même aire?  
Expliquez votre raisonnement.

## B. Énoncé de la situation-problème 2

Germaine, la couturière est spécialisée dans la confection de patchworks. Germaine a confectionné une série de patchworks qu'elle voudrait agrandir d'un tour complet de carrés blancs.

Voici quelques exemples de patchworks agrandis. Les carrés blancs sont ceux que Germaine voudrait bien ajouter.



Germaine se met à compter le nombre de carrés nécessaires pour agrandir d'un tour complet chacun de ses morceaux de tissus. Au bout d'un moment, elle soupire, ça fait vraiment beaucoup de carrés à compter. Aidez Germaine !

1. De la même manière que ceux qui sont présentés ci-dessus, agrandissez et dessinez un patchwork qui compterait 5 carrés de côté.
2. Combien de carrés seraient nécessaires pour agrandir un patchwork de 8 carrés de côté ?

.....

Et pour un patchwork de 56 carrés de côté

.....

3. Trouvez un moyen qui éviterait à Germaine de compter et qui lui permettrait de connaître le nombre de carrés nécessaires pour l'agrandissement, quelles que soient les dimensions des patchworks.

Rédigez ce moyen avec des mots.

.....

.....

4. Exprimez ce moyen en langage mathématique.

.....

.....

## C. Auto-évaluation formative

Fonctions et algèbre

Calcul littéral

### Faire le point Page 114

**Aide-mémoire**

- Monômes semblables
- Addition et soustraction de monômes semblables
- Multiplication de monômes
- Addition de polynômes
- Soustraction de polynômes
- Multiplication de polynômes

Ressources en ligne

1 Effectue et réduis ces expressions littérales.

a)  $5x - x =$  \_\_\_\_\_

b)  $(2x - 5) \cdot 3x =$  \_\_\_\_\_

c)  $(3d \cdot 5b) \cdot 4 =$  \_\_\_\_\_

d)  $(3x + 3) - (2x - 2) =$  \_\_\_\_\_

e)  $2a^4 - 2a^3 =$  \_\_\_\_\_

f)  $(c^3)^2 =$  \_\_\_\_\_

g)  $-5x^2 - 5x^2 \cdot 13 =$  \_\_\_\_\_

h)  $(-2x)^3 =$  \_\_\_\_\_

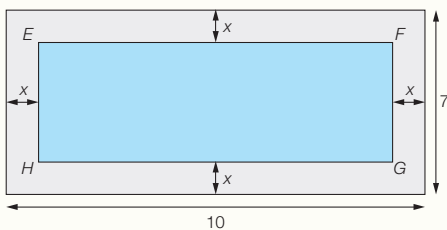
i)  $(6x - 4y) + (6x + 4y) =$  \_\_\_\_\_

j)  $x^3 \cdot x^2 =$  \_\_\_\_\_

k)  $(3x - 9)(7x + 10) =$  \_\_\_\_\_

l)  $5x^2 - 12x - 15x^2 - 22x =$  \_\_\_\_\_

2 Le bassin d'une piscine est entouré d'une bordure en béton de largeur  $x$ . Exprime le plus simplement possible l'aire et le périmètre du bassin EFGH.



\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

✂ Corrigé en fin de fichier



Corrigé FLP page 118

**Exercice 1** (1 point par réponse correcte)

- |                  |                       |
|------------------|-----------------------|
| a) $4x$          | g) $-70x^2$           |
| b) $6x^2 - 15x$  | h) $-8x^3$            |
| c) $60bd$        | i) $12x$              |
| d) $x+5$         | j) $x^5$              |
| e) $2a^4 - 2a^3$ | k) $21x^2 - 33x - 90$ |
| f) $c^6$         | l) $-10x^2 - 34x$     |

**Exercice 2**

Aire du bassin:

$(10x - 2x)(7 - 2x)$  1 point

$70 - 34x + 4x^2$  1 point

Périmètre du bassin:

$2(10 - 2x) + 2(7 - 2x)$  1 point




$34 - 8x$  1 point

**Exercice 3**

a)  $2(-4)^3 - 3(-4) = -116$  2 point

b)  $12(-4) \left(\frac{3}{4}\right)^2 = -48 \frac{9}{16} = -27$  2 point

**Autoévaluation:**

Critère	Exercice			
Addition/soustraction monômes	$a + e + g + l$	4	3 ou 2	1 ou 0
Addition/soustraction polynômes	$d + i$	2	1	0
Multiplication monômes	$c + f + h + j$	4	3 ou 2	1 ou 0
Multiplication monôme et polynôme	$b$	1		0
Multiplication polynômes	$k$	1		0
Élaboration d'expressions littérales à partir de figures géométriques	Ex. 2	4	3 ou 2	1 ou 0
Détermination de la valeur numérique d'une expression littérale	Ex. 3	4	3 ou 2	1 ou 0

## D. Évaluation sommative en fin de séquence

Mathématiques FA **10VP**

Date :

### TS (test significatif) Calcul littéral

Prénom :

*Calculatrice autorisée.*

*Remarques :*

- *Les calculs et/ou développements doivent être faits sur les feuilles de données et sont indispensables pour valider tes réponses.*
- *Soigne la présentation de ton travail.*

#### Exercice 1 (6pts)

Cherche la valeur numérique des produits pour  $a = -3$  ;  $b = \frac{2}{3}$  ;  $c = -\frac{1}{5}$  ;  $d = -1$

a.  $2a^2 + d =$  .....

b.  $7a(b + c) =$  .....

c.  $12ab^2d =$  .....

#### Exercice 2 (10pts)

Calcule, réduis et ordonne, si possible, ces expressions.

d.  $a(ab)(ab) =$  .....

e.  $(2xy)^3 =$  .....

f.  $2(xy)^3 =$  .....

g.  $7 + p + q - p - 6 =$  .....

h.  $(5x^2y^3z^4)^3 =$  .....

i.  $9z - 4z - 3z - 2z =$  .....

j.  $(4xy)(3xz)(-2yz) =$  .....

k.  $(4x + 5y) - (3x + 2y - 4) =$  .....

l.  $(3a + b)(5a - 7) =$  .....

m.  $2y(3y - 5) =$  .....

#### Exercice 3 (2pts)

Réduis et ordonne les polynômes suivants.

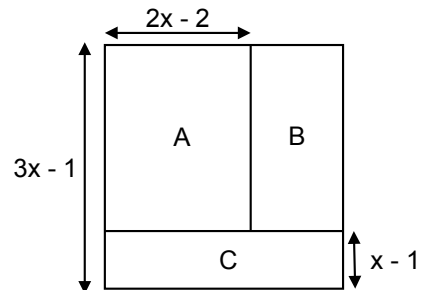
a.  $3x^2 + 5x^3 + 2x + 4x^4 + 2x^2 + 4 + 4x^3 + 2 =$  .....

b.  $(-2x)^4 + 2x^4 + (-2x)^3 + 2x^3 + (-2x)^2 + 2x^2 + (-2x) + 2x + 2 =$  .....

**Exercice 4 (6pts)**

Dans un carré de côté  $3x - 1$ , on a délimité trois rectangles représentés par A, B et C.  
Donne toutes les réponses sous forme **réduite**

a) Calcule l'aire du rectangle A

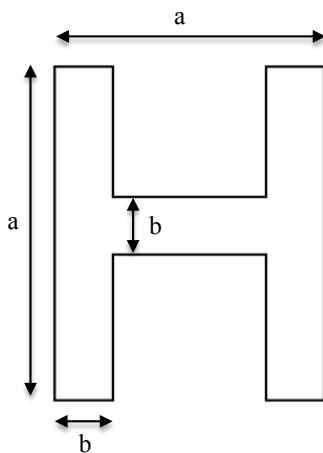


b) Calcule le périmètre du rectangle C

c) Calcule le périmètre du rectangle B

**Exercice 5 (4pts)**

Exprime le plus simplement possible l'aire et le périmètre de cette forme.



## E. Items de l'Épreuve Cantonale de Référence

10VP – AVRIL 2016 – 1<sup>RE</sup> PARTIE SANS CALCULATRICE

Activité 5

(6 pts)

Effectue et réduis, si possible, les expressions littérales.

a.  $30x^2 - 7x^4 - 17x^2 + 11x^4 =$

b.  $4x^3 - (4x - 2y + 7x^3) + 3y =$

c.  $-y^2z^2 + 3y^2z - 11y^2z + z^2 =$

d.  $x^2 \cdot x^3 - x^2 \cdot x =$

e.  $x \cdot x \cdot x \cdot x + x^3 - 2x^4 =$

f.  $5z^6 - z^3 \cdot z - 8z^3 + z^4 =$

## HANGAR

/ 4 PTS

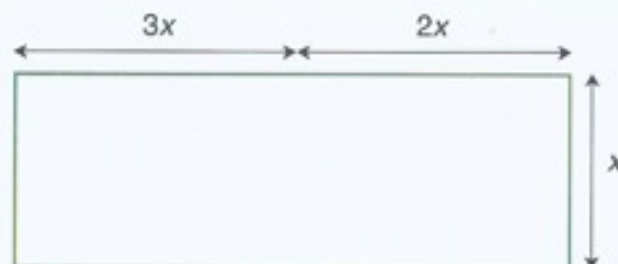
On souhaite construire un hangar en forme de parallélépipède rectangle.  
Les dimensions de la base sont de 5 m sur 15 m et la hauteur  $x$  reste à déterminer.

Sachant qu'on ne peint ni le toit, ni la porte d'une surface de  $7 \text{ m}^2$ , exprime sous forme réduite l'aire totale des murs extérieurs à peindre en fonction de  $x$ .

## AIRE D'UN RECTANGLE

/ 7 PTS



a. Exprime sous forme réduite l'aire de ce rectangle en fonction de  $x$ .



## F. Productions des élèves lors de la situation-problème 1

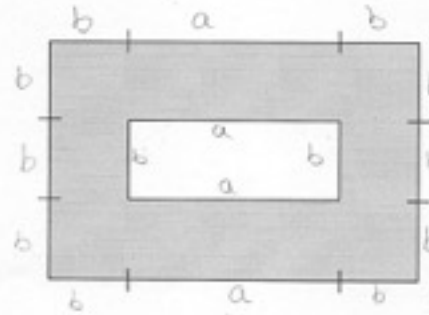
Groupe 1:

Le périmètre des figures n'est constitué que des segments

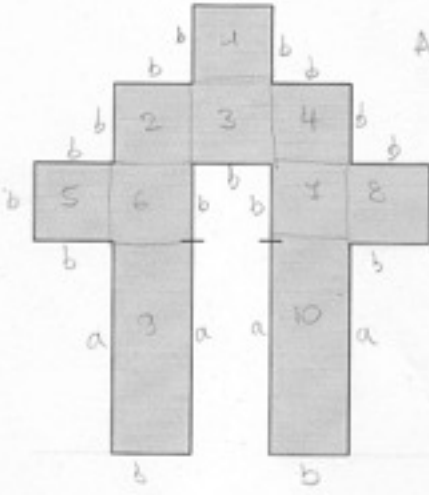
- de longueur a :  a = 5 cm
- de longueur b :  b = 2 cm

$A = (a+b+b) \cdot (b+b+b) - a \cdot b = a+b^2$   
 $= (5+2+2) \cdot (2+2+2) - 5 \cdot 2 = 21$   
 $= a+b^2 - ab$   
 $=$

$A = (b \cdot b \cdot 8) + (b \cdot a \cdot 2)$



$A = (5 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2+2+2) = 54$   
 $54 - (5 \cdot 2) = 49 \text{ cm}$





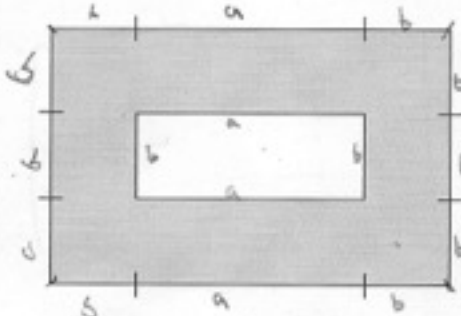
$A_1 = 2 \cdot 2 = 4 / 4 \cdot 8 = 32$   
 $A_2 + 10 = 5 \cdot 2 \cdot 2 = 20$   
 $20 + 32 = 52 \text{ cm}$

Les parties ombrées des deux figures ont-elles la même aire ? **Non**  
 Expliquez votre raisonnement.

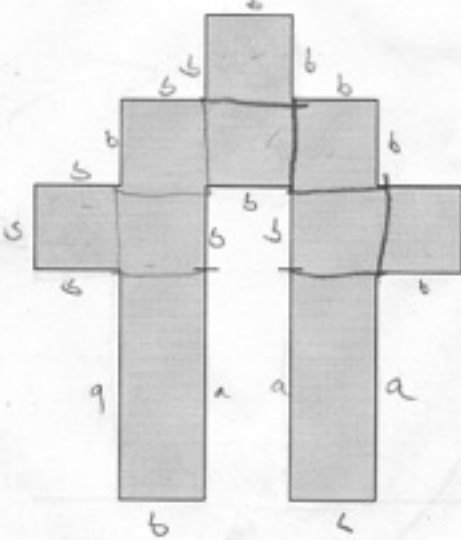
Groupe 2:

Le périmètre des figures n'est constitué que des segments

- de longueur a :  = 2
- de longueur b :  = 1

1) 

$a = 3b \cdot (a+2b) - a \cdot b$

2) 

$a = (b \cdot b) \cdot 8 + a \cdot b \cdot 2$

Les parties ombrées des deux figures ont-elles la même aire ?

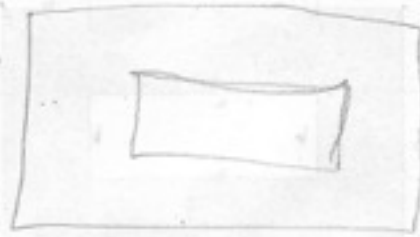
Expliquez votre raisonnement.

La figure 2 a une plus grande aire que la figure 1. On a mis les mesures (a, b) sur les côtés puis nous avons fait les formules pour trouver l'aire.

1)  $a = 3b \cdot (a+2b) - a \cdot b = 3 \cdot (2+2) = 12 \quad 12 - 2 = \underline{10 \text{ cm}^2}$

2)  $a = (b \cdot b) \cdot 8 + a \cdot b \cdot 2 = 08 + 4 = 12 \text{ cm}^2$

Nous avons trouver ses calculs, parce que nous avons remplacé  $a$  par  $2$  et  $b$  par  $1$ . Nous constatons que nous aurions pu trouver a vue d'œil que  $2$  était plus grand.  
(designer)

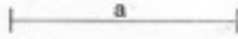



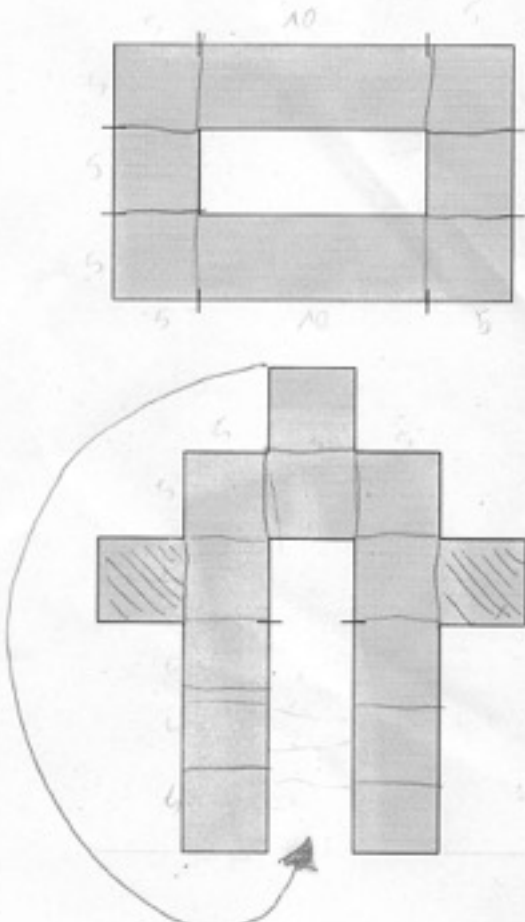
Il dépasse de  
2 carré  
Sinon c'est la  
même forme



Groupe 3:

Le périmètre des figures n'est constitué que des segments

- de longueur a :  = 10
- de longueur b :  = 5



Handwritten calculations:

$$15 \cdot 10 = 300$$

$$300 - (10 \cdot 5) = 250$$

$$A = 250$$
  

$$15 \cdot 25 = 375$$

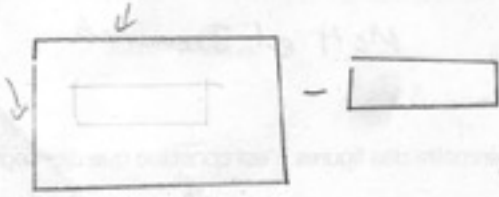
$$375 - 25 = 350$$

Les parties ombrées des deux figures ont-elles la même aire ?  
Expliquez votre raisonnement.

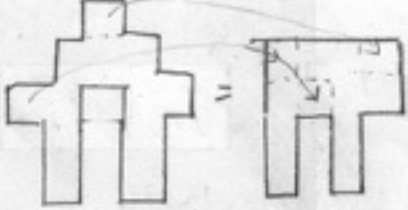
Non, car <sup>(dans la 2<sup>ème</sup> figure)</sup> si on ~~ajoute~~ <sup>déplace</sup> un carré, en bas pour fermer la forme, on obtient la même aire + 2 carrés donc celle de dessous est plus grande. Les 2 carrés achurés sont en plus.

Groupe 4:

$S_1 a = 4$   
 $S_1 b = 1,5$   
 $(3 \cdot 3,5) \cdot (2 \cdot 1,5 + 4) = 31,5 \text{ cm}^2$   
 $31,5 - 1,5 \cdot 4 = 25,5 \text{ cm}^2$   
 $(3 \cdot b) \cdot (2b + a) - b \cdot a = ?$





$S_1 a = 4$   
 $S_1 b = 1,5$   
 $2b \cdot 4b + b \cdot a \cdot 2 = ?$   
 $2 \cdot 1,5 \cdot 4 \cdot 1,5 + 1,5 \cdot 4 \cdot 2 = 27$

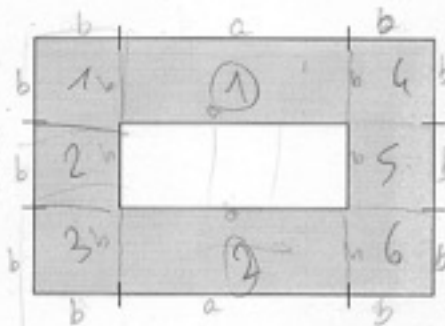


la première est plus grande

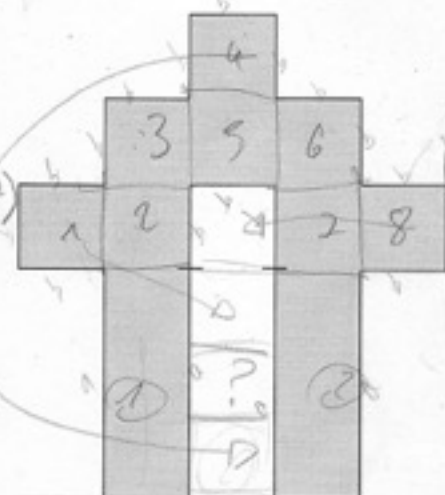
Groupe 5:

Le périmètre des figures n'est constitué que des segments

- de longueur a : 
- de longueur b : 



il y a 6 carrés ( $b^2$ )  
et 2 rectangles  
( $a \cdot b$ )





il y a 8 carrés ( $b^2$ )  
et 2 rectangles  
( $a \cdot b$ )

Donc, on remarque que dans le 2<sup>e</sup> dessin il y a deux carrés en plus donc il est plus grand  
Les parties ombrées des deux figures ont-elles la même aire ?  
Expliquez votre raisonnement.

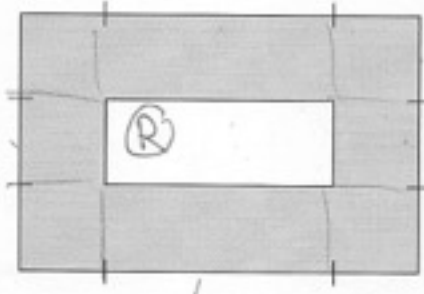
$2b \cdot 2$

Groupe 6:

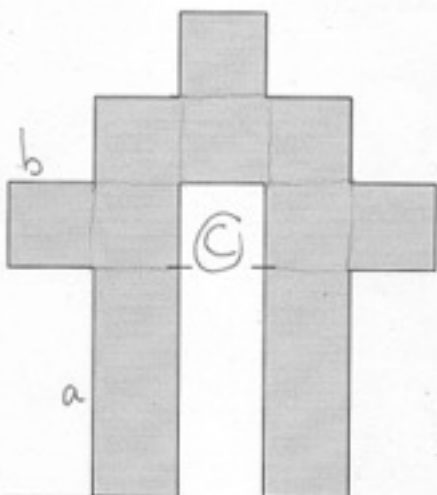
Le périmètre des figures n'est constitué que des segments

- de longueur a : 
- de longueur b : 

A forme grise :  $(a + 2b) \cdot 3b - ab$      *grand rectangle*  $A = (a + 2b) \cdot 3b$   
*petit rectangle*  $ab$



A carés :  $8b^2 \dots$   
A rectangles :  $2ab$



A total  $8b^2 + 2ab$

Les parties ombrées des deux figures ont-elles la même aire ?  
Expliquez votre raisonnement.



**R** - 6 carés ( $b^2$ )  
- 2 rectangles ( $ab$ )

**C** 8 carés ( $b^2$ )  
2 rectangles ( $ab$ )

*L'air est différente car :  
Il y a le même nombre de rectangle  
dans chacune des deux formes mais il  
y a 2 carés de plus dans la forme  
C donc l'air de C est supérieur à celle  
de R*

Groupe 7:

Le périmètre des figures n'est constitué que des segments

- de longueur a : 
- de longueur b : 

1)

$1,5 + 1,5 + 1,5 = 4,5 \text{ cm}$   
 $4 + (1,5 \cdot 2) = 7$   
 $7 \cdot 4,5 = 31,5 \text{ cm}^2$   
 $1,5 \cdot 4 = 6 \text{ cm}^2$   
 $31,5 - 6 = \underline{25,5 \text{ cm}^2}$

A partie grise

2)

$8,5 \cdot 7,5 = 63,75 \text{ cm}^2$   
 $4 \cdot 1,5 = 6$   
 $6 \cdot 3 = 18 \text{ cm}^2$   
 $1,5 \cdot 1,5 = 2,25 \text{ cm}^2$   
 $2,25 \cdot 7 = 15,75 \text{ cm}^2$   
 $63,75 - 18 - 15,75 = \underline{30 \text{ cm}^2}$

A partie grise

Les parties ombrées des deux figures ont-elles la même aire ?  
Expliquez votre raisonnement.

Non, les parties grises des deux formes n'ont pas la même aire.

Nous avons calculé l'aire du carré ~~en partie~~ des deux formes puis ensuite nous avons calculé l'aire des parties blanches et après nous avons soustrait l'aire du carré des parties blanches. Ensuite nous avons obtenu l'aire de la partie grise.

## G. Productions des élèves lors de la situation-problème 2

## Groupe 1:

3. Trouvez un moyen qui éviterait à Germaine de compter et qui lui permettrait de connaître le nombre de carrés nécessaires pour l'agrandissement, quelles que soient les dimensions des patchworks.  
Rédigez ce moyen avec vos mots.

Si le patchwork est un carré c'est le nombre de carrés sur le côté plus 1 fois 4.

4. Exprimez ce moyen en langage mathématique.

Ex: 8 carrés de côté  $(8+1) \cdot 4$

## Groupe 2:

3. Trouvez un moyen qui éviterait à Germaine de compter et qui lui permettrait de connaître le nombre de carrés nécessaires pour l'agrandissement, quelles que soient les dimensions des patchworks.  
Rédigez ce moyen avec vos mots.

Compter le nombre de carrés sur une longueur et multiplier par 4 puis ajouter 4 carrés au résultat pour compléter le carré.

4. Exprimez ce moyen en langage mathématique.

$X \cdot 4 + 4y$

x longueur avec  $y = 1$  carré  
un certain  
nombre de  
carré

Groupe 3:

3. Trouvez un moyen qui éviterait à Germaine de compter et qui lui permettrait de connaître le nombre de carrés nécessaires pour l'agrandissement, quelles que soient les dimensions des patchworks.

Rédigez ce moyen avec vos mots.

Il faut multiplier le nombre de carrés sur un côté par quatre et ajouter au résultat quatre.

4. Exprimez ce moyen en langage mathématique.

$$4a + 4$$

$a$  = nombre de carrés sur un côté

Groupe 4:

3. Trouvez un moyen qui éviterait à Germaine de compter et qui lui permettrait de connaître le nombre de carrés nécessaires pour l'agrandissement, quelles que soient les dimensions des patchworks.

Rédigez ce moyen avec vos mots.

Pour qu'elle ne compte pas il suffit de taper sur une calculatrice le nombre de carrés du côté (pas agrandis) fois  $4+4$ .

4. Exprimez ce moyen en langage mathématique.

$a$  = nombre de carrés du côté

$$\hookrightarrow (a \cdot 4) + 4$$

Groupe 5:

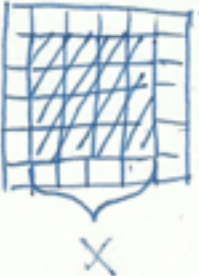
3. Trouvez un moyen qui éviterait à Germaine de compter et qui lui permettrait de connaître le nombre de carrés nécessaires pour l'agrandissement, quelles que soient les dimensions des patchworks.  
Rédigez ce moyen avec vos mots.

Elle doit soustraire 1 au nombre de carré d'un côté puis multiplié la différence par 4

4. Exprimez ce moyen en langage mathématique.

$(x+2-1) \cdot 4$

petits patchwork



Groupe 6:

3. Trouvez un moyen qui éviterait à Germaine de compter et qui lui permettrait de connaître le nombre de carrés nécessaires pour l'agrandissement, quelles que soient les dimensions des patchworks.  
Rédigez ce moyen avec vos mots.

On prend le nombre de carré pour un côté, on rajoute 1 et on fait  $\cdot 4$  (parce qu'il y a 4 côtés)

4. Exprimez ce moyen en langage mathématique.

$x+1 \cdot 4$



