

UNIVERSITÉ DE GENÈVE

FACULTÉ DES SCIENCES

Section de mathématiques

Professeur Pierre DE LA HARPE

Croissance de groupes agissant sur des arbres

Thèse

présentée à la Faculté des sciences de l'Université de Genève
pour obtenir le grade de Docteur ès sciences, mention mathématiques

par

Laurent BARTHOLDI

de

Verfoir (GE) et Frittschen (EG)

Thèse N° 3160

GENÈVE

Atelier de Reproduction de la Section de Physique

2000

Table des matières

Table des figures	7
Résumé	9
Première partie	9
Deuxième partie	11
Troisième partie	12
Annexes	13
partie 1. Introduction aux groupes enracinés	15
Chapitre 1. Arbres	17
1.1. Automorphismes	18
1.2. Sous-groupes	20
1.3. Groupes profinis	21
1.4. Groupes et automates finis	23
Chapitre 2. Groupes à branches	27
2.1. Exemples Principaux	28
Chapitre 3. Croissance dans les groupes	31
3.1. Séries de croissance	31
3.2. Croissance asymptotique	32
Chapitre 4. Sous-groupes paraboliques	35
4.1. Algèbres de Hecke	37
4.2. Congruence Quantitative	38
Chapitre 5. Spectres de représentations	39
Chapitre 6. Le premier groupe de Grigorchuk, \mathcal{G}	43
6.1. Quelques sous-groupes de \mathcal{G}	43
6.2. L -présentations	44
6.3. L'espace homogène \mathcal{G}/P	46
6.4. Algèbres de Lie	47
6.5. Croissance	50
Chapitre 7. Groupes à colonne vertébrale	53
partie 2. Croissance dans des graphes	55
Chapitre 8. Croissance des chemins	57
Chapitre 9. Applications aux groupes	59
Chapitre 10. Calculs pour des arbres	63
Chapitre 11. Séries de produits directs et de produits libres	65

partie 3. Croissance des groupes agissant sur des arbres	67
Chapitre 12. Groupes GGS	69
12.1. Exemples	69
12.2. Une première réduction	71
Chapitre 13. Propriétés algébriques	73
Chapitre 14. Croissance des mots	77
Annexes	81
Annexe. Liste des publications	83
Annexe A. The Growth of Grigorchuk's Torsion Group	85
A.1. Introduction	85
A.2. Growth of Groups	85
A.3. The Grigorchuk 2-group	86
A.4. The Growth of G	86
A.5. Conclusion	88
Annexe B. Lower Bounds on the Growth of a Group acting on the Binary Rooted Tree	89
B.1. Introduction	89
B.2. Growth of Groups	90
B.3. The Grigorchuk 2-Group	91
B.4. The Growth of G	91
B.5. Finite Transducers	93
B.6. Description of Γ	95
B.7. Construction of Γ	97
B.8. The Graph Γ	98
Annexe C. Salem numbers and growth series of some hyperbolic graphs	103
C.1. Introduction	103
C.2. Salem Polynomials	104
C.3. The Denominators of the Growth Series $F_{\ell,m}$	105
C.4. The Growth of the Graphs $X_{\ell,m}$	107
Annexe D. Lie Methods in Growth of Groups and Groups of Finite Width	109
D.1. Introduction	109
D.2. Growth of Groups and Associated Graded Algebras	111
D.3. Torsion Groups of Uniformly Exponential Growth	116
D.4. Growth of Algebras and Amenability	116
D.5. Groups Acting on Rooted Trees	117
D.6. The Group \mathfrak{G}	119
D.7. The Group $\tilde{\mathfrak{G}}$	123
D.8. Other Fractal Groups	127
D.9. Profinite Groups of Finite Width	127
Annexe E. On the Spectrum of Hecke Type Operators related to some Fractal Groups	129
E.1. Introduction	129
E.2. Groups acting on rooted trees	132
E.3. Unitary Representations and Hecke type Operators	141
E.4. Computations of Finite Spectra	146
E.5. Schreier Graphs	159
E.6. Concluding Remarks and Problems	165
E.7. Acknowledgments	166

Annexe F. On Parabolic Subgroups and Hecke Algebras of Some Fractal Groups	167
F.1. Introduction	167
F.2. Groups Acting on Rooted Trees	169
F.3. Branch Groups	171
F.4. The Group G	174
F.5. The Group \tilde{EG}	179
F.6. The Group Γ	184
F.7. The Group $\bar{\Gamma}$	187
F.8. The Group $\overline{\bar{\Gamma}}$	190
F.9. Quasi-Regular Representations	191
F.10. Acknowledgments	194
Annexe. Bibliographie	195
Annexe. Index	203

Table des figures

1.1	La n partie supérieure z de $\mathcal{T}_{\{1,2,3\}}$	18
1.2	Les transducteurs pour les trois groupes $\Gamma, \bar{\Gamma}, \bar{\bar{\Gamma}}$	24
1.3	Le transducteur minimal associé à $\bar{\Gamma}$	24
5.1	Les zéros de $Q_n(\lambda, \mu)$ pour Γ	40
5.2	La mesure spectrale associée à Γ	41
5.3	Le graphe de Schreier de Γ_6	42
6.1	Le sommet du treillis des sous-groupes normaux de \mathcal{G} au-dessous de H	45
9.1	La correspondance $\alpha \mapsto v$ reliant la cocroissance et le rayon spectral (si $ S = 4$)	60
12.1	Un automate agissant comme t_ε	70
12.2	L'étiquetage du portrait de t_ε relativement à A	70
B.1	The transducer Δ for $1 \times B$	96
E.1	The Finite Transducers for G and $\tilde{07EG}$	137
E.2	The Automata for $\Gamma, \bar{\Gamma}$ and $\bar{\bar{\Gamma}}$	140
E.3	The spectrum of $Q_n(\lambda, \mu)$ for G and $\tilde{07EG}$	149
E.4	The empiric spectral measure for G	150
E.5	The Functions F for Γ and $\bar{\Gamma}$	153
E.6	The spectrum of $Q_n(\lambda, \mu)$ for Γ	154
E.7	The Cantor-Set spectrum of Δ_n for Γ	155
E.8	The spectrum of $Q_n(\lambda, \mu)$ for $\bar{\Gamma}$ and $\bar{\bar{\Gamma}}$	159
E.9	The Cantor-Set spectrum of Δ_n for $\bar{\Gamma}$ and $\bar{\bar{\Gamma}}$	160
E.10	The Schreier Graph of Γ_6 . The red and blue edges represent the generators s and a .	162

Résumé

Nu cours de mes cinq années d'assistantat à l'Université de Genève, j'ai eu l'occasion de m'intéresser à de nombreuses questions gravitant autour de la théorie des groupes, et en particulier j'ai eu la très grande chance de collaborer avec Slava Grigorchuk, grâce à ses fréquents passages à Genève. Nous avons ainsi écrit trois articles communs : [BG00, BG99a, BG99b]. Récemment, j'ai aussi entrepris des recherches en commun avec Zoran Šuník, exposées dans l'article [BŠ00]. De plus, j'ai écrit indépendamment deux articles sur la croissance du groupe de Grigorchuk : [Bar98, Bar00d]. L'exposition de ces résultats représente la première partie de ce travail.

Dans la deuxième partie, je résume mon article [Bar99]. Il concerne un sujet aussi étudié par Slava Grigorchuk. Finalement, la troisième partie contient des résultats rédigés ici pour la première fois sur la croissance de certains groupes agissant sur des arbres enracinés.

Première partie

Je rappelle d'abord de la façon la plus complète possible les concepts entourant les groupes agissant sur des arbres enracinés. Ils font l'objet d'une partie de livre écrite par Rostislav Grigorchuk [Gri00]. La notion-clé est celle de *groupe à branches*, développée au chapitre 2. De nombreux exemples de groupes [GS83b] sont en fait à branches, bien que ce fait n'ait été reconnu que plus tard.

Les deux chapitres suivants décrivent les articles [BG99a, BG99b]. Dans ces articles, on appelle *sous-groupe parabolique* le stabilisateur d'un point sur le bord de l'arbre, et on décrit pour cinq exemples de groupes fractals le spectre de l'opérateur de type Hecke pour la représentation quasi-régulière associée à un tel sous-groupe.

THÉORÈME A (voir le théorème 5.2). *Soient $\mathfrak{G}, \tilde{\mathfrak{G}}, \Gamma, \bar{\Gamma}$ et $\bar{\bar{\Gamma}}$ les groupes définis à la section 2.1, avec leurs systèmes de générateurs respectifs. Le spectre de l'opérateur de type Hecke $H = \sum_{\text{générateurs } g} \rho(g)$ associé à la représentation quasi-régulière ρ associée à un sous-groupe parabolique est :*

- pour \mathfrak{G} , une union d'intervalles $[-2, 0] \cup [2, 4]$;
- pour $\tilde{\mathfrak{G}}$, l'intervalle $[0, 4]$;
- pour Γ et $\bar{\Gamma}$, la clôture de l'ensemble

$$\left\{ 4, 1, 1 \pm \sqrt{6}, 1 \pm \sqrt{6 \pm \sqrt{6}}, 1 \pm \sqrt{6 \pm \sqrt{6 \pm \sqrt{6}}}, \dots \right\},$$

qui est l'union d'un ensemble de Cantor de mesure de Lebesgue nulle et d'un ensemble dénombrable ;

- pour $\bar{\bar{\Gamma}}$, la clôture de l'ensemble

$$\left\{ 4, -2, 1, 1 \pm \sqrt{\frac{9 \pm 3}{2}}, 1 \pm \sqrt{\frac{9 \pm \sqrt{45 \pm 4 \cdot 3}}{2}}, 1 \pm \sqrt{\frac{9 \pm \sqrt{45 \pm 4 \sqrt{45 \pm 4 \cdot 3}}}{2}}, \dots \right\},$$

qui est un ensemble de Cantor de mesure nulle.

En considérant les graphes de Schreier associés à ces groupes et leur sous-groupe, on obtient :

COROLLAIRE B. *Il existe des graphes 4-réguliers dont les spectres sont les ensembles décrits dans le théorème A.*

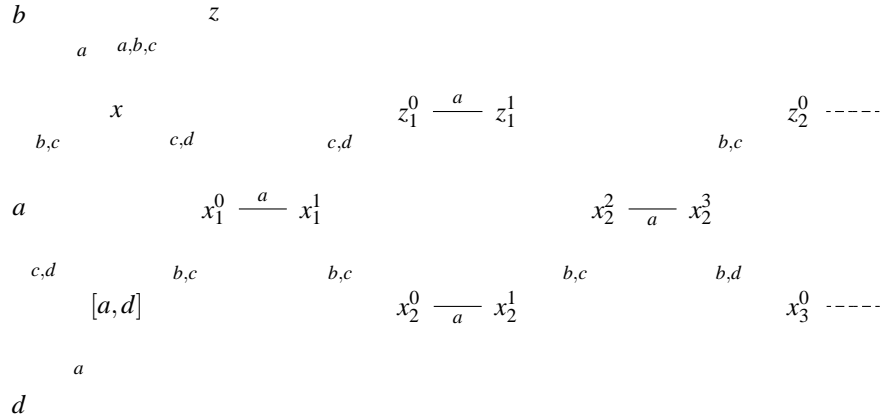
En plus de l'étude de leur spectre, on obtient des résultats sur la décomposition des représentations considérées : On note P le stabilisateur d'un point du bord de l'arbre, et P_n le stabilisateur d'un point à distance n de la racine de l'arbre. Alors la représentation sur $\ell^2(G/P)$ est irréductible, et on détermine complètement la décomposition en irréductibles des représentations sur $\ell^2(G/P_n)$: elle est donnée par les doubles classes de P_n dans G .

THÉORÈME C (voir la section 9 de [BG99a]). *Les paires formées d'un des 5 groupes G du théorème A et d'un sous-groupe parabolique P sont les paires de Gel'fand. En d'autres termes, les algèbres de Hecke $\mathcal{H}(G, P)$ sont abéliennes.*

Il en va de même pour G et le stabilisateur P_n d'un sommet de niveau n . Par conséquent, il y a une bijection entre les composantes irréductibles de $\ell^2(G/P_n)$ et les doubles classes de P_n dans G , telle que la dimension d'une composante irréductible égale la cardinalité de la P_n -orbite dans G/P_n associée.

Dans le chapitre 6, je décris le premier exemple \mathfrak{G} de Grigorchuk [Gri80a], en insistant particulièrement sur quelques résultats nouveaux obtenus par Rostislav Grigorchuk ou par moi. En particulier, nous avons calculé dans [BG00] la structure de plusieurs algèbres de Lie associées à \mathfrak{G} . Le résultat principal est la description des constantes de structure de ces algèbres sous la forme d'un graphe, que nous appelons le *graphe de Cayley* de l'algèbre de Lie graduée $L(\mathfrak{G}) = \bigoplus_{n \geq 1} L_n$ sur le corps à deux éléments \mathbb{F}_2 . Il est formé de sommets à l'abscisse n représentant une base de L_n , avec des arêtes de l'abscisse n à l'abscisse $n+1$ étiquetées par les générateurs de \mathfrak{G} (et donc de $L(\mathfrak{G})$) représentant les constantes de structure de l'algèbre dans la base fixée.

THÉORÈME D (voir le théorème 6.16). *Le graphe de Cayley de $L(\mathfrak{G})$ est comme suit :*



où les éléments x_m^r et z_m^r sont définis à la section 6.4.

Le graphe de Cayley de $L(\mathfrak{G})$ du théorème D fait par exemple apparaître les propriétés suivantes de $L(\mathfrak{G}) = \bigoplus_{n \geq 1} L_n$:

- L'espace L_1 est de dimension 3, et $\{b, a, d\}$ en est une base.
- L'espace L_2 est de dimension 2, avec base $\{x, [a, d]\}$. Si on note $A_g(h) = [g, h]$ l'opérateur adjoint, on a

$$\begin{aligned}
 A_a : & \quad b \mapsto x, \quad a \mapsto 0, \quad d \mapsto [a, d] \\
 A_b : & \quad b \mapsto 0, \quad a \mapsto x, \quad d \mapsto 0 \\
 A_c : & \quad b \mapsto 0, \quad a \mapsto x + [a, d], \quad d \mapsto 0 \\
 A_d : & \quad b \mapsto 0, \quad a \mapsto [a, d], \quad d \mapsto 0
 \end{aligned}$$

- Les espaces L_{2^m+1+r} sont de dimension 2 (engendrés par $\{x_m^r, z_{m-1}^r\}$) quand $0 \leq r < 2^{m-1}$, et de dimension 1 (engendrés par x_m^r) quand $2^{m-1} \leq r < 2^m$.

- Les seuls opérateurs $A_g : L_{2^{m+1+r}} \rightarrow L_{2^{m+1+r+1}}$, pour $g \in \{a, b, c, d\}$, satisfaisant $A_g(x_m^r) = x_m^{r+1}$ sont ceux correspondant à la r -ième lettre de $\sigma^m(a)$, pour la substitution σ de la section 6.2.

En résumé, on montre que \mathfrak{G} est de largeur finie. On réfute ainsi la conjecture 6.10, due à Efim Zel'manov, en exhibant un nouveau type de pro-2-groupe de largeur finie : la pro-2-complétion de \mathfrak{G} .

Dans la dernière section, je rappelle les résultats de mes deux articles [Bar98, Bar00d]. Ils donnent les bornes suivantes sur la fonction de croissance

$$\gamma(n) = \#\{g \in G \mid g = s_1 \dots s_n, s_i \in \{1, a, b, c, d\}\}$$

du groupe \mathfrak{G} :

THÉORÈME E (voir les théorèmes 6.17 et 6.19). *La fonction de croissance $\gamma(n)$ du groupe de Grigorchuk \mathfrak{G} satisfait*

$$e^{n^\alpha} \lesssim \gamma(n) \lesssim e^{n^\beta},$$

avec $\alpha = 0.5157$ et $\beta = \log(2)/\log(2/\eta) \approx 0.767$, où $\eta \approx 0.811$ est la racine réelle du polynôme $X^3 + X^2 + X - 2$.

Dans le chapitre 7, je décris une généralisation de nombreux résultats de croissance des mots et des périodes à une grande famille, définie algébriquement, de groupes agissant sur des arbres. Ces résultats ont été obtenus avec Zoran Šuník [BŠ00]. À titre d'exemple, on montre :

THÉORÈME F (voir le théorème 7.5). *Si ω est une suite r -homogène (voir la définition 7.4), alors la fonction de croissance du groupe G_ω (définie en 7.1) agissant sur l'arbre d -régulier satisfait*

$$e^{n^\alpha} \lesssim \gamma_\omega(n) \lesssim e^{n^\beta}$$

avec $\alpha = \frac{\log(d)}{\log(d) - \log \frac{1}{2}}$ et $\beta = \frac{\log(d)}{\log(d) - \log(\eta_r)}$, où η_r est la racine réelle du polynôme $X^r + X^{r-1} + X^{r-2} - 2$.

Si de plus G_ω agit régulièrement sur le premier niveau de l'arbre, alors la fonction de croissance des périodes

$$\pi_\omega(n) = \max\{\text{ordre}(g) \mid g = s_1 \dots s_n, s_i \in \{1, a, b, c, d\}\}$$

satisfait

$$\pi_\omega(n) \lesssim n^{\log_{1/\eta_r}(d)}.$$

Deuxième partie

La deuxième partie décrit mon premier article, qui montre une généralisation de la formule de Grigorchuk reliant la croissance au rayon spectral. Étant donné un graphe \mathfrak{G} avec deux sommets \star, \dagger fixés, on définit la série de croissance des chemins $G(t) = \sum_{\gamma \in [\star, \dagger]} t^{|\gamma|}$, où la somme parcourt les chemins de \star à \dagger , et la série $F(u, t) = \sum_{\gamma \in [\star, \dagger]} t^{|\gamma|} u^{\text{nb}(\gamma)}$, où $\text{nb}(\gamma)$ est le nombre de points où γ rebrousse son chemin. Le résultat principal est :

THÉORÈME G (voir le théorème 8.5). *Si \mathfrak{G} est d -régulier, on a*

$$(1) \quad \frac{F(1-u, t)}{1-u^2 t^2} = \frac{G\left(\frac{t}{1+u(d-u)t^2}\right)}{1+u(d-u)t^2}.$$

En particulier, $F(1, t) = G(t)$ et $F(0, t)$ compte les chemins sans points de rebroussement. Si \mathfrak{G} est un arbre et $\star = \dagger$, on a $F(0, t) = 1$ car un arbre ne contient aucun circuit élémentaire non-trivial, et (1) donne aisément la série comptant les circuits dans un arbre d -régulier

$$G(t) = \frac{2(d-1)}{d-2+d\sqrt{1-4(d-1)t^2}},$$

déjà obtenue par Harry Kesten [Kes59].

L'équation (1) donne aussi une relation entre les rayons de convergence de $F(0, t)$ et $G(t)$:

COROLLAIRE H. Si on note $1/\alpha$ le rayon de convergence de $F(0,t)$ et $1/(dv)$ le rayon de convergence de $G(t)$, on a

$$v = \begin{cases} \frac{\sqrt{d-1}}{d} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{d-1}} + \frac{\sqrt{d-1}}{\alpha} \right) & \text{si } \alpha > \sqrt{d-1}, \\ \frac{2\sqrt{d-1}}{d} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette équation, appelée la *n* formule de Grigorchuk *z*, constitue le résultat principal de [Gri80b]. Si \mathfrak{G} est le graphe de Cayley d'un groupe Γ relativement à un système de générateurs S de cardinalité d , on appelle généralement α la *croissance* de Γ et v le *rayon spectral* de la marche aléatoire simple sur \mathfrak{G} . La série G s'appelle aussi la *série de Green* de \mathfrak{G} . Elle contient de nombreuses informations sur Γ ; par exemple, le théorème de Kesten affirme que Γ est moyennable si et seulement si $v = 1$.

Je considère ensuite les produits libres de graphes, qui sont un analogue naturel des produits libres de groupes, et j'obtiens une formule reliant les fonctions G du produit aux fonctions G des facteurs. Rappelons qu'un graphe \mathfrak{G} est *transitif sur ses sommets* si son groupe d'automorphismes agit transitivement sur les sommets de \mathfrak{G} .

THÉORÈME I (voir le théorème 11.2). Soient $G_{\mathfrak{E}}$ et $G_{\mathfrak{F}}$ les séries de Green de deux graphes \mathfrak{E} et \mathfrak{F} transitifs sur leurs sommets. Alors

$$\frac{1}{(tG_{\mathfrak{E}*\mathfrak{F}})^{-1}} = \frac{1}{(tG_{\mathfrak{E}})^{-1}} + \frac{1}{(tG_{\mathfrak{F}})^{-1}} - \frac{1}{t},$$

où $F^{-1}(t)$ est l'inverse formel de la série F , c'est-à-dire une série G telle que $G(F(t)) = F(G(t)) = t$.

Une équation équivalente à celle-ci, mais de manière non-triviale, apparaît dans un article de Gregory Quenell [Que94], et, dans un langage complètement différent (celui des variables aléatoires non-commutatives), dans un article de Dan Voiculescu [Voi90, Theorem 4.5].

Troisième partie

Finalement, dans la troisième partie, je donne des résultats jamais publiés concernant la croissance de groupes GGS. Ce sont des groupes définis ainsi : on fixe un entier d , un sous-groupe A du groupe symétrique \mathfrak{S}_d sur d lettres et une suite $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{d-1})$ d'éléments de A . Le groupe A agit sur les suites $\{1, 2, \dots, d\}^*$ en n'agissant que sur la première lettre, et un automorphisme t est défini par

$$t(d \dots di_0 i_1 \dots i_n) = d \dots di_0 \varepsilon_{i_0}(i_1) i_2 \dots i_n,$$

où $i_0 \neq d$ (et t fixe la suite $d \dots d \dots d$). Un groupe GGS est un groupe engendré par de tels A et t ; la terminologie fait référence à Rostislav Grigorchuk, Narain Gupta et Saïd Sidki [Bau93].

Le résultat principal est :

THÉORÈME J (voir le théorème 14.2). Soit G un groupe GGS. Alors soit G est virtuellement abélien, soit G est de croissance intermédiaire.

Ce résultat s'applique en particulier au groupe suivant : on prend $d = 4$, $A = \langle a \rangle$ où a est le 4-cycle $(1, 2, 3, 4)$, et $\varepsilon = (a, 1, a^3)$. Je réponds ainsi à une question que Rostislav Grigorchuk a posée il y a dix ans, en montrant que ce groupe est de croissance intermédiaire.

Il est aussi valable pour les trois exemples $\Gamma, \bar{\Gamma}, \overline{\bar{\Gamma}}$ de la section 2.1. En particulier, il étend le résultat de [FG85, FG91] affirmant la croissance sous-exponentielle de Γ .

J'indique aussi des critères déterminant quand un groupe GGS est infini, juste-infini, de torsion, etc.

Annexes

Finalemment je liste tous les articles à la rédaction desquels j'ai participé, en j'en inclus ceux qui ont le plus grand rapport avec les sujets traités dans cette thèse. Il s'agit de **[Bar98, Bar00d]** que j'ai écrits seul, **[BC99]** écrit avec Tullio Ceccherini-Silberstein, et **[BG00, BG99b, BG99a]** écrits avec Rostislav Grigorchuk. En revanche, j'omets **[Bar99]** auquel la deuxième partie est consacrée.

Première partie

Introduction aux groupes enracinés

CHAPITRE 1

Arbres

Dans son premier article [Gri80a], Rostislav Grigorchuk introduit son premier groupe comme un sous-groupe du groupe des transformations linéaires par morceaux de l'intervalle. Depuis, il a semblé plus naturel de le définir comme un sous-groupe du groupe des automorphismes d'un arbre enraciné.

Ce passage s'effectue en plusieurs étapes : on fixe un entier d , et on note $B = \{0, 1, \dots, d-1\}$. L'écriture en base d donne une bijection τ entre $[0, 1[$ et les suites $(x_0, x_1, x_2, \dots) \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ qui ne se terminent pas par $\overline{d-1}$.

L'ensemble $B^{\mathbb{N}}$ est un espace topologique (pour la topologie de Tychonoff), et même un espace métrique compact, pour la distance

$$d(x, y) = d^{-\min\{n | x_n \neq y_n\}}$$

(où par convention $\min \emptyset = \infty$), et donc un espace mesuré, pour la mesure de Bernouilli définie sur les ouverts cylindriques $\sigma B^{\mathbb{N}}$ (avec $\sigma \in B^*$) par

$$\mu(\sigma B^*) = d^{-|\sigma|}.$$

On peut maintenant considérer les actions sur $B^{\mathbb{N}}$ au lieu de $\tau([0, 1[)$, en considérant les actions à en ensemble de mesure nulle près.

Dans une deuxième étape, on suppose que le groupe agit par homéomorphismes linéaires par morceaux de $[0, 1[$, dont les pentes sont de la forme d^i avec $i \in \mathbb{Z}$ et dont les points de discontinuité de la pente sont de la forme id^j avec $i, j \in \mathbb{Z}$. Il suit alors que l'action, transposée dans le domaine $B^{\mathbb{N}}$, préserve les ouverts cylindriques $\sigma B^{\mathbb{N}}$, c'est-à-dire est de la forme $\sigma B^{\mathbb{N}} \mapsto \tau B^{\mathbb{N}}$. On obtient ainsi une action du groupe sur B^* , donnée par $\sigma \mapsto \tau$. Or ce dernier ensemble B^* a la structure d'un arbre, comme on va le voir.

Ce passage d'une action sur $[0, 1[$ à une action sur un arbre enraciné a été déjà utilisé, par exemple, dans l'étude du groupe de Thompson [CFP96, Röv99b].

DEFINITION 1.1. Un *digraphe* est un couple d'ensembles $\mathfrak{G} = (S, A)$, muni de deux applications $\alpha, \omega : A \rightarrow S$. Les éléments de S sont appelés les *sommets* de \mathfrak{G} , et ceux de A ses *arêtes*. \mathfrak{G} est dit *fini* si S et A sont des ensembles finis. $\alpha(a)$ et $\omega(a)$ sont les *extrémités* de l'arête a .

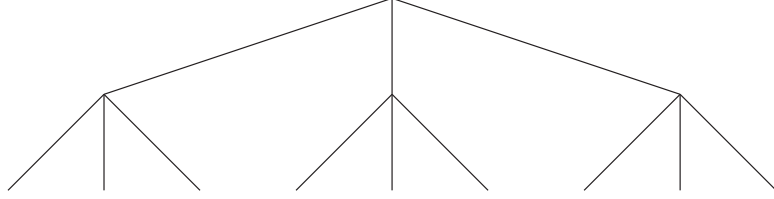
La définition ci-dessus sera constamment utilisée dans ce travail. Elle se distingue de la définition habituelle en combinatoire en ce que les arêtes sont toujours supposées orientées, elles peuvent être des boucles, et il peut y avoir plusieurs arêtes entre deux sommets.

DEFINITION 1.2. Soit Σ un alphabet fini. On désigne par Σ^* le monoïde libre sur Σ , c'est-à-dire l'ensemble des mots finis formés de lettres de Σ , avec pour opération la concaténation.

Soit M un monoïde, engendré par un ensemble Σ . Le *de Cayley* de M relativement à Σ est le digraphe étiqueté $\mathcal{C}(M, \Sigma)$ dont l'ensemble de sommets est M , et dont les arêtes sont les (m, ms) , étiquetées par s , pour tous les $m \in M$ et $s \in \Sigma$.

Soit Σ un alphabet fini. On appelle *arbre régulier enraciné* le graphe de Cayley du monoïde libre sur Σ , et on le note \mathcal{T}_{Σ} , ou \mathcal{T} s'il n'y a pas d'ambiguïté sur Σ .

Il y a une correspondance naturelle entre les sommets de \mathcal{T} et les chemins géodésiques (c'est-à-dire sans aller-retour) finis issus de \emptyset dans \mathcal{T} .

FIG. 1.1. La n partie supérieure z de $\mathcal{T}_{\{1,2,3\}}$

DEFINITION 1.3. Soit \mathcal{T}_Σ un arbre. Le *bord* de \mathcal{T}_Σ est l'ensemble $\partial\mathcal{T}_\Sigma = \Sigma^\mathbb{N}$, muni de la topologie de Tychonoff. On l'identifie à l'espace des chemins géodésiques infinis issus de \emptyset dans \mathcal{T}_Σ .

Si on prend $\Sigma = \{0, 1, \dots, d-1\}$ comme plus haut, on a alors l'arbre $\mathcal{T}_\Sigma = \Sigma^*$, dont le bord est $\partial\mathcal{T}_\Sigma = \Sigma^\mathbb{N}$, équivalent à un ensemble de mesure nulle près à $[0, 1]$.

Bien que ce ne soit apparu que plus tard, le fait de voir les groupes de Grigorchuk comme des groupes d'automorphismes d'un arbre régulier enraciné est très fructueux : on fait apparaître ainsi de nombreuses propriétés géométriquement claires mais algébriquement difficiles à formuler. On pense par exemple à la notion de *profondeur* ou de *portrait* d'un élément — voir la définition 1.6.

Des traitements algébriques des groupes agissant sur des arbres ont été tentés : on peut se débarrasser entièrement de la notion d'arbre pour ne considérer que des groupes G construits inductivement à partir de produits en couronne $G' \wr A$ où G' est un groupe du même type et A est un groupe fini. Cette approche a été suivie par Lev Kaloujnine [Kal45, Kal48], son élève Vitaliĭ Sushchanskii [Suš79], John Wilson [GW99], Zoran Šuník et l'auteur [BŠ00] (voir le chapitre 7), et bien d'autres encore.

Notons que Σ^* est infini dès que Σ est non-vide ; la n partie supérieure z de Σ^* est représentée dans la figure 1.1, où $|\Sigma| = 3$. Il faut aussi remarquer que dans cette théorie les arbres poussent traditionnellement vers le bas, et que la racine de l'arbre est représentée en haut.

En parlant d'un arbre enraciné, les conventions suivantes seront respectées : il sera dit *d-régulier*, où $d = |\Sigma|$, et ceci bien qu'en chaque sommet excepté la racine il y ait $d+1$ arêtes, d sortantes et une entrante. On supposera toujours

$$\Sigma = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} = \{1, 2, \dots, d\}$$

avec ce choix de représentants, qui rendent les notations plus simples. On identifiera les sommets à des suites finies de symboles pris dans Σ , et la racine à la suite vide \emptyset .

Soit σ un sommet de \mathcal{T}_Σ . Le Σ^* -module à droite $\sigma\Sigma^*$ des mots commençant par σ , est appelé le *sous-arbre en σ* et est noté $(\mathcal{T}_\Sigma)_\sigma$. On a les décompositions suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_\Sigma &= \{\emptyset\} \cup \bigcup_{s \in \Sigma} (\mathcal{T}_\Sigma)_s, \\ \partial\mathcal{T}_\Sigma &= \bigcup_{s \in \Sigma} \partial(\mathcal{T}_\Sigma)_s. \end{aligned}$$

1.1. Automorphismes

On note $\text{Aut } \mathcal{T}$ le groupe des automorphismes de \mathcal{T} . Ce sont les bijections de \mathcal{T} qui préservent la structure de digraphe :

$$\text{Aut } \mathcal{T} = \{g : \mathcal{T} \xrightarrow{1-1} \mathcal{T} \mid (\sigma, \tau) \in A \Leftrightarrow (g\sigma, g\tau) \in A\},$$

où A désigne l'ensemble des arêtes de \mathcal{T} .

LEMMA 1.4. Soit $g \in \text{Aut } \mathcal{T}$. Alors g préserve les préfixes et la distance à la racine :

$$|\sigma| = |g\sigma|, \quad g(\sigma\tau) \in g(\sigma)\Sigma^*.$$

DÉMONSTRATION. g , étant une bijection du graphe, doit envoyer l'unique chemin géodésique de \emptyset à σ sur l'unique chemin géodésique de \emptyset à $g\sigma$, et ces chemins ont nécessairement même longueur. Un chemin de \emptyset à $g(\sigma\tau)$ doit nécessairement passer par $g(\sigma)$. \square

Il s'ensuit que tout $g \in \text{Aut } \mathcal{T}$ agit par permutation sur Σ^n , l'ensemble des branches à profondeur n . En particulier, g agit sur Σ et on a une surjection $\text{Aut } \mathcal{T} \rightarrow \mathfrak{S}_\Sigma$, où $\mathfrak{S}_\Sigma = \mathfrak{S}_d$ désigne le groupe symétrique sur d lettres.

Plus généralement, soit $\text{Stab}(\sigma)$ le stabilisateur dans $\text{Aut } \mathcal{T}$ du sommet σ . On forme

$$\text{Stab}(n) = \bigcap_{\sigma \in \Sigma^n} \text{Stab}(\sigma).$$

Soit π_n la surjection $\text{Aut } \mathcal{T} \rightarrow \mathfrak{S}_{\Sigma^n}$. On a alors $\text{Stab}(n) = \text{Ker}(\pi_n)$, et π_n admet une section dans $\text{Aut } \mathcal{T}$, donnée par l'action sur les premiers n symboles de tout mot. On a donc toujours $\mathfrak{S}_{\Sigma^n} \subset \text{Aut } \mathcal{T}$ canoniquement ainsi : si $\Pi \in \mathfrak{S}_{\Sigma^n}$,

$$(2) \quad \Pi(\sigma_1 \dots \sigma_n \tau) = \Pi(\sigma_1 \dots \sigma_n) \tau,$$

et l'action de Π sur des mots de longueur inférieure à n est imposée par le lemme 1.4.

Soit σ un sommet de \mathcal{T} . On a une injection $\phi_\sigma : \text{Aut } \mathcal{T} \rightarrow \text{Stab}(\sigma) \subset \text{Aut } \mathcal{T}$ induite par l'injection de \mathcal{T}_σ dans \mathcal{T} . En formules, il s'agit de

$$(3) \quad \phi_\sigma(g) : \begin{cases} \sigma\tau & \mapsto \sigma g(\tau) \\ \tau \notin \sigma\Sigma^* & \mapsto \tau. \end{cases}$$

Il est clair que tout $g \in \text{Stab}(n)$ induit par restriction des $g_\sigma \in \text{Stab}(\sigma)$ pour tout $\sigma \in \Sigma^n$, et qu'une collection $(g_\sigma)_{\sigma \in \Sigma^n}$ quelconque d'éléments de $\text{Aut } \mathcal{T}$ produit, par assemblage via $(\phi_\sigma)_{\sigma \in \Sigma^n}$, un élément de $\text{Stab}(n)$. On a donc le résultat suivant, dû à Lev Kaloujnine :

PROPOSITION 1.5.

$$\text{Aut } \mathcal{T} = (\text{Aut } \mathcal{T} \times \dots \times \text{Aut } \mathcal{T}) \rtimes \mathfrak{S}_\Sigma,$$

où le produit direct de d copies de $\text{Aut } \mathcal{T}$ s'injecte dans $\text{Aut } \mathcal{T}$ via $\phi_1 \times \dots \times \phi_d$, et \mathfrak{S}_Σ s'injecte naturellement dans $\text{Aut } \mathcal{T}$ comme en (2).

Dans ce qui suit, on aura toujours les notations suivantes :

$$(4) \quad \phi_\sigma : \text{Aut } \mathcal{T} \rightarrow \text{Stab}(\sigma);$$

son inverse,

$$(5) \quad \psi_\sigma : \text{Stab}(\sigma) \rightarrow \text{Aut } \mathcal{T};$$

leur assemblage,

$$(6) \quad \Psi_n : \begin{cases} \text{Stab}(n) & \rightarrow (\text{Aut } \mathcal{T})^{\Sigma^n} \\ g & \mapsto (\psi_{1\dots 1}(g), \dots, \psi_{d\dots d}(g)); \end{cases}$$

et l'application quotient

$$(7) \quad \pi_n : \text{Aut } \mathcal{T} \rightarrow \mathfrak{S}_{\Sigma^n}.$$

On notera aussi $\psi = \psi_1$ et $\pi = \pi_1$.

Tout élément $g \in \text{Aut } \mathcal{T}$ peut être identifié à son *portrait*, défini comme suit par induction :

DEFINITION 1.6. Soit $G < \text{Aut } \mathcal{T}$ un groupe et $S \subset G$ un sous-ensemble. Le *S-portrait* de $g \in G$ par rapport à S est un sous-arbre de \mathcal{T} , dont les sommets intérieurs sont étiquetés par \mathfrak{S}_Σ et dont les sommets terminaux sont étiquetés par S . Il est défini inductivement comme suit : si $g \in S$, son portrait est le sous-arbre de \mathcal{T} à un sommet (la racine), dont l'étiquette est g lui-même. Sinon, l'étiquette de la racine est $\pi_1(g)$, et les étiquetages des sous-arbres $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_d$ sont les *S-portraits* de $\psi_1(g\pi_1(g)^{-1}), \dots, \psi_d(g\pi_1(g)^{-1})$.

Si $S = \emptyset$, on parle simplement du *portrait* de g . Le sous-arbre sur lequel il repose est alors nécessairement \mathcal{T} tout entier. Inversement, un élément est dit *S-fini* si l'arbre de son S -portrait est fini.

La *profondeur* de $g \in G$ est la profondeur de l'arbre de son portrait, c'est-à-dire la longueur maximale d'un chemin commençant à la racine et sans rebroussement. On la note $\partial(g) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Considérons par exemple le groupe \mathfrak{G} défini au chapitre 6. On a $d = 2$, donc on peut représenter les portraits sous la forme $(x_1, x_2)\varepsilon$ où x_1 et x_2 sont des portraits et ε est soit 1 soit a .

Notons $\Pi(g)$ le portrait de g , et prenons d'abord $S = \{1, a, b, c, d\}$. On a

$$\begin{aligned} \Pi(1) &= 1, & \Pi(a) &= a, & \Pi(b) &= b, & \Pi(ab) &= (c, a)a, \\ \Pi(aba) &= (c, a), & \Pi(abab) &= (\Pi(ca), \Pi(ac)) = ((a, d)a, (d, a)a). \end{aligned}$$

En revanche, si on prend $S = \{1\}$, on a

$$\begin{aligned} \Pi(1) &= 1, & \Pi(a) &= a, & \Pi(b) &= (a, (a, (1, (a, \dots))))), \\ \Pi(ab) &= ((a, (1, (a, (a, \dots))))), a), & \Pi(aba) &= ((a, (1, (a, (a, \dots))))), a), \\ \Pi(abab) &= ((a, (1, (a, (a, \dots))))), ((1, (a, (a, \dots))))), a). \end{aligned}$$

Soit ι un portrait dans \mathcal{T} , c'est-à-dire une application $\iota : \mathcal{T} \rightarrow S \cup \mathfrak{S}_\Sigma$. On peut construire un automorphisme g_ι de \mathcal{T} comme suit :

$$g_\iota(\sigma_1 \sigma_2 \dots) = \begin{cases} \iota_0(\sigma_1 \sigma_2 \dots) & \text{si } \iota_0 \in S, \\ \iota_0(\sigma_1) g_{\iota'}(\sigma_2 \dots) & \text{sinon, où } \iota'_\tau = \iota_{\sigma_1 \tau} \text{ pour tout } \tau \in \mathcal{T}. \end{cases}$$

et il est clair qu'on récupère ainsi l'élément de $\text{Aut } \mathcal{T}$ dont on a pris le S -portrait.

Remarquons encore que $\text{Aut } \mathcal{T}$ est un groupe profini, égal à la limite inverse des \mathfrak{S}_{Σ^n} , et qu'il agit par isométries sur l'espace compact $\partial\mathcal{T}$ — voir le chapitre 2.

1.2. Sous-groupes

Soit maintenant G un sous-groupe de $\text{Aut } \mathcal{T}$. On définit les groupes suivants, associés à G et calqués sur les définitions de la section précédente :

- pour σ un sommet, le stabilisateur $\text{Stab}_G(\sigma) = \text{Stab}(\sigma) \cap G$;
- de façon similaire, $\text{Stab}_G(n) = \text{Stab}(n) \cap G$;
- le *sur-groupe de sommet* G^σ du sommet σ , qui est l'image de $\text{Stab}_G(\sigma)$ par ψ_σ ;
- le *sous-groupe de sommet* G_σ du sommet σ , qui est l'intersection de G et de $\text{Aut } \mathcal{T}_\sigma$; on l'appelle aussi le *stabilisateur restreint* $\text{Rist}_G(\sigma)$. En formules,

$$(8) \quad \text{Rist}_G(\sigma) = \{g \in G \mid g\tau = \tau \text{ pour tout } \sigma \notin \sigma\Sigma^*\}.$$

On peut donner cette définition alternative de $\text{Rist}_G(\sigma)$: ce sont les éléments de G dont le portrait est trivial en-dehors de \mathcal{T}_σ ;

- de façon similaire, $\text{Rist}_G(n) = \prod_{\sigma \in \Sigma^n} \text{Rist}_G(\sigma)$.

PROPOSITION 1.7. *On a les inclusions suivantes :*

$$\text{Rist}_G(n) \leq \text{Stab}_G(n) \hookrightarrow \prod_{\sigma \in \Sigma^n} G^\sigma.$$

DEFINITION 1.8. Soit G un groupe agissant sur l'arbre enraciné \mathcal{T}_Σ . Il est dit *sphériquement transitif* si l'action de G sur Σ^n est transitive, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

G est dit *fractal* si pour tout sommet σ de \mathcal{T}_Σ on a $G^\sigma = G$, c'est-à-dire si $\text{Stab}_G(\sigma)$ est isomorphe à G par l'identification ψ_σ .

G a la *propriété de congruence* si tout sous-groupe d'indice fini de G contient $\text{Stab}_G(n)$ pour un n suffisamment grand.

On constate aisément que G est sphériquement transitif si et seulement si l'action de G sur le bord $\partial\mathcal{T}$ de l'arbre est ergodique.

LEMMA 1.9. *G est fractal si et seulement si l'image de $\psi(G) < (\text{Aut } \mathcal{T})^\Sigma$ est un sous-produit direct sur G, c'est-à-dire si $\psi|_G$ est une inclusion dans $G \times \cdots \times G$ qui est surjective sur chaque facteur.*

DÉMONSTRATION. Si $p_i \psi|_G \neq G$ pour une projection p_i sur le sommet i , alors $\text{Stab}_G(i)|_i \neq G$ donc G n'est pas fractal. On suppose maintenant que $\psi|_G$ est une inclusion dans un sous-produit direct, et on montre par induction que $\text{Stab}_G(\sigma)|_\sigma \cong G$ pour tout $\sigma \in \mathcal{T}_\Sigma$.

La base de l'induction, pour $|\sigma| = 1$, équivaut à l'hypothèse. Maintenant par induction $G \rightarrow G^{\Sigma^{n-1}}$ est une inclusion dans un sous-produit direct, et chaque facteur G est appliqué sur G^Σ par $\psi|_G$. La composée de deux inclusions dans des sous-produits directs est encore de la même forme, donc $G \rightarrow G^{\Sigma^n}$ est bien une inclusion dans un sous-produit direct. \square

LEMMA 1.10. *Un groupe fractal agissant sur \mathcal{T}_Σ est sphériquement transitif si et seulement s'il agit transitivement sur le premier niveau Σ de l'arbre \mathcal{T}_Σ .*

DÉMONSTRATION. Soit G fractal, et supposons qu'il est transitif sur Σ . On montre par induction qu'il est transitif sur Σ^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La base de l'induction équivaut à l'hypothèse. Soit $\sigma \in \Sigma^n$ un sommet. Du fait que G est transitif sur Σ , on a un sommet $1\tau_2 \dots \tau_n \in \Sigma^n$ dans la G -orbite de σ . Si de plus G est transitif sur Σ^{n-1} , alors le groupe de sommet G^1 , isomorphe à G , est transitif sur $1\Sigma^{n-1}$, et $1 \dots 1 \in \Sigma^n$ est dans la G -orbite de σ , donc G est transitif sur Σ^n . \square

1.3. Groupes profinis

On se rappelle que $\partial\mathcal{T}$, l'ensemble des suites infinies sur Σ , est un espace métrique pour la distance

$$\delta(\sigma, \tau) = \max\{d^{-n} \mid \sigma_n \neq \tau_n\},$$

avec la convention habituelle $\max \emptyset = 0$. Comme tel, $\partial\mathcal{T}$ est homéomorphe à l'ensemble de Cantor. Le groupe $\text{Aut } \mathcal{T}$ agit sur $\partial\mathcal{T}$ par isométries, et on a même $\text{Aut } \mathcal{T} = \text{Isom } \partial\mathcal{T}$.

On peut maintenant mettre une métrique sur $\text{Aut } \mathcal{T}$: pour $f, g \in \text{Aut } \mathcal{T}$, on pose

$$\delta(f, g) = \max\{2^{-|\sigma|} \mid f(\sigma) \neq g(\sigma)\}.$$

Cette distance induit une structure d'espace compact séparé sur $\text{Aut } \mathcal{T}$, dans laquelle deux éléments sont très proches si leurs actions coïncident sur un grand sous-arbre $\bigcup_{i \leq n} \Sigma^i$ de \mathcal{T} . Il s'ensuit que $\text{Aut } \mathcal{T}$ est un groupe profini. Clairement, la distance δ est invariante à droite et à gauche.

On peut aussi voir la structure profinie de $\text{Aut } \mathcal{T}$ en considérant ses quotients finis

$$\text{Aut}(\mathcal{T})_n = \text{Aut } \mathcal{T} / \text{Stab}(n) = \mathfrak{S}_\Sigma \wr \cdots \wr \mathfrak{S}_\Sigma$$

donnés par la restriction de l'action à Σ^n , ou de façon équivalente au sous-arbre $\bigcup_{i \leq n} \Sigma^i$, et on a

$$\text{Aut } \mathcal{T} = \varprojlim_{n \rightarrow \infty} \text{Aut}(\mathcal{T})_n.$$

La topologie donnée par ce système projectif coïncide avec celle donnée par la métrique δ .

Les pro-sous-groupes de Sylow de $\text{Aut } \mathcal{T}$ peuvent être obtenus ainsi : on fixe un premier p . On note π_{ij} , pour $i \geq j$, la projection naturelle $\text{Aut}(\mathcal{T})_i \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{T})_j$, et π_j la projection $\text{Aut } \mathcal{T} \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{T})_j$.

On choisit un sous-groupe de Sylow P_1 de $\text{Aut}(\mathcal{T})_1$. Ensuite, pour tout $n \geq 2$, on choisit un sous-groupe de Sylow P'_n de $\pi_{n,n-1}^{-1}(P_{n-1})$, qui est un p -sous-groupe de $\text{Aut}(\mathcal{T})_n$ qu'on complète en P_n , un p -Sylow de $\text{Aut}(\mathcal{T})_n$. On pose maintenant

$$P = \{g \in \text{Aut } \mathcal{T} \mid \pi_j(g) \in P_j \text{ pour tout } j \in \mathbb{N}\}.$$

P est un pro-sous-groupe de Sylow de $\text{Aut } \mathcal{T}$, et ils peuvent tous être obtenus de cette manière.

Au cas où d est un nombre premier, on peut exhiber aisément un d -Sylow de $\text{Aut } \mathcal{T}$, qu'on notera $\text{Aut}_* \mathcal{T}$: choisissons un d -cycle de \mathfrak{S}_d , par exemple $a = (1, \dots, d)$, et considérons le d -Sylow $\langle a \rangle$ de \mathfrak{S}_d . Alors $\text{Aut}_* \mathcal{T}$ est formé de tous les $g \in \text{Aut } \mathcal{T}$ dont le portrait n'a d'étiquettes

que dans $\langle a \rangle$. Il est un pro- d groupe, et est égal à la limite inverse des produits en couronne itérés $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \wr \cdots \wr \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

On connaît mal les propriétés et la structure de $\text{Aut } \mathcal{T}$. Il se décompose comme produit en couronne, ce qui a fait l'objet de la thèse de Lev Kaloujnine [Kal48]. On sait toutefois ceci : on se rappelle qu'un groupe profini est dit à *base dénombrable* si la topologie du groupe est ensemble dénombrable de voisinages de l'identité ; ou, ce qui est équivalent, s'ils sont isomorphes à des sous-groupes fermés d'un produit cartésien dénombrable de groupes finis.

PROPOSITION 1.11. *Soit d un nombre premier. Alors tout pro- d -groupe à base dénombrable est isomorphe à un sous-groupe fermé de $\text{Aut}_*(\mathcal{T}_d)$.*

On s'intéresse maintenant à la structure profinie qu'on peut donner à un sous-groupe G de $\text{Aut } \mathcal{T}$.

DEFINITION 1.12. Soit G un groupe résiduellement fini. Sa *complétion profinie* \widehat{G} est la limite du système projectif formé des G/N où N est un sous-groupe normal d'indice fini de G , avec une flèche naturelle $G/N \rightarrow G/M$ chaque fois que $N \subset M$. Sa *pro- p -complétion* est la limite inverse du système formé des G/N où N est un sous-groupe normal d'indice une puissance de p .

LEMMA 1.13. *Soit $G < \text{Aut } \mathcal{T}$ doté de la propriété de congruence. Alors sa complétion profinie \widehat{G} est isomorphe (en tant que groupe profini) à sa fermeture topologique \overline{G} dans $\text{Aut } \mathcal{T}$.*

Si de plus G est inclus dans un pro- p -sous-groupe de Sylow $\text{Aut}_p(\mathcal{T})$ de $\text{Aut } \mathcal{T}$, alors \overline{G} est isomorphe à la pro- p -complétion \widehat{G}_p de G .

DÉMONSTRATION. Par la propriété de congruence, $\{\overline{\text{Stab}_G(n)}\}$ est une base de voisinages ouverts de l'identité dans \widehat{G} . \square

DEFINITION 1.14. Soit G un sous-groupe fermé de $\text{Aut } \mathcal{T}$. Sa *dimension de Hausdorff* $\dim(G)$ est définie dans [BS97] par

$$\dim(G) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |G_n|}{\log |\text{Aut}(\mathcal{T})_n|}.$$

Si de plus d est un nombre premier et G est contenu dans $\text{Aut}_*(\mathcal{T})$, un d -Sylow de $\text{Aut } \mathcal{T}$, sa **-dimension de Hausdorff* $\dim_*(G)$ est définie par

$$\dim_*(G) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{d-1}{d^n} \log_d |G_n| = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_d |G_n|}{\log_d |\text{Aut}_*(\mathcal{T})_n|}.$$

En particulier, la dimension de Hausdorff de $\text{Aut } \mathcal{T}$ est 1, et elle est invariante par passage à un sous-groupe d'indice fini.

L'étude des pro- p -groupes est essentielle pour la compréhension des p -groupes, comme on le voit par exemple dans [Sha95b] et [KLP97]. Les résultats et conjectures s'expriment naturellement dans ce langage, voir par exemple la conjecture 6.10.

1.4. Groupes et automates finis

Il existe une classe d'automorphismes de \mathcal{T} suffisamment générale pour faire apparaître des phénomènes intéressants : tous les p -groupes finis, des p -groupes infinis, des groupes de croissance intermédiaire, des groupes libres, etc., tout en étant assez restreinte pour autoriser leur analyse, en particulier à l'aide de démonstrations par récurrence. Il s'agit des *automorphismes automatiques*, qu'on définit plus bas.

Les automates finis trouvent de nombreuses applications en théorie des groupes, en particulier comme *accepteurs de mots*, où un automate reconnaît certains mots comme éléments du groupe, et un autre automate encode la multiplication du groupe — plus précisément, reconnaît les paires de mots (u, v) où u diffère de v par multiplication à droite par un générateur. Ce sujet est étudié exhaustivement dans [ECH⁺92], qui développe la théorie des *groupes automatiques*.

On peut faire un usage complètement différent des automates comme *transducteurs* ou comme *machines séquentielles*, pour lesquels de bonnes références sont [Eil74, chapitre XI]

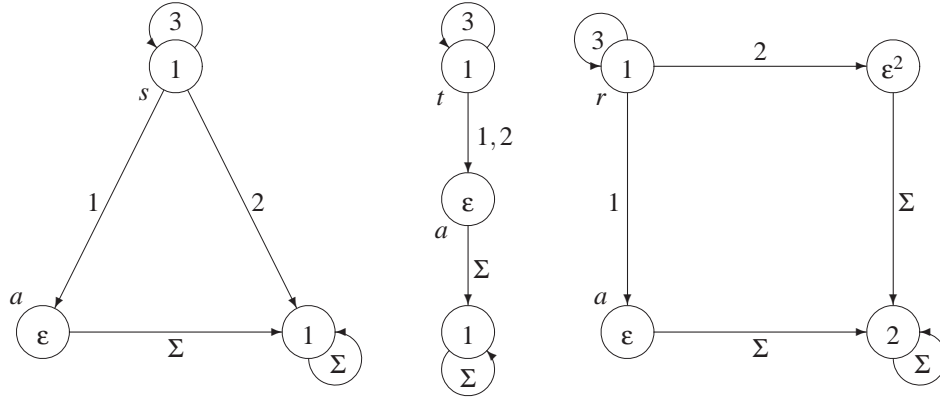


FIG. 1.2. Les transducteurs pour les trois groupes GGS avec $A = \mathfrak{A}_3 : \Gamma, \bar{\Gamma}, \bar{\bar{\Gamma}}$. Les chiffres 1, 2, 3 sur les arêtes représentent des étiquettes dans Σ . Les symboles 1, ε , ε^2 dans les cercles représentent des étiquettes dans \mathfrak{G}_Σ . Les lettres a, r, s, t représentent des choix d'état initial.

ou [GC71]. Là, les automates sont eux-mêmes les éléments du groupe, et s'identifient à la transformation qu'ils accomplissent sur les mots. Ces groupes sont appelés *groupes à automates*, pour les distinguer des groupes définis au paragraphe précédent. Les automates à partir desquels ils sont construits sont appelés *machines de Mealy* ou *machines de Moore* (voir [Glu61] ou [Bra84, page 109]); ces deux notions sont équivalentes.

Nous présentons maintenant une définition légèrement limitée de *transducteur fini*. Dans la terminologie standard des références citées plus haut, ils seraient appelés des *transducteurs finis inversibles*.

DEFINITION 1.15. Soit Σ un alphabet fini. Un *transducteur fini* sur Σ est un digraphe fini $\mathfrak{G} = (S, A)$, un étiquetage $\lambda : A \rightarrow \Sigma$ des arêtes de \mathfrak{G} tel que pour tout sommet $v \in S$ la restriction de λ est une bijection entre $\{a \in A \mid \alpha(a) = v\}$ et Σ , et un étiquetage $\tau : S \rightarrow \mathfrak{G}_\Sigma$ des sommets (appelés *états*) de \mathfrak{G} par \mathfrak{G}_Σ .

Un *transducteur initial* \mathfrak{G}_q est un transducteur fini \mathfrak{G} avec un état distingué $q \in S$.

Soit \mathfrak{G} un transducteur fini, et $\{\mathfrak{G}_q\}_{q \in V}$ l'ensemble de ses transducteurs initiaux. Tout \mathfrak{G}_q définit un automorphisme $\overline{\mathfrak{G}_q}$ de l'arbre \mathcal{T}_Σ comme suit : soit $\sigma = \sigma_0 \dots \sigma_n$ un sommet de \mathcal{T} , et soit a l'arête de \mathfrak{G}_q issue de q et étiquetée σ_0 . On pose inductivement

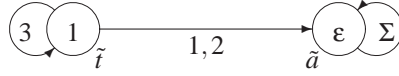
$$\overline{\mathfrak{G}_q}(\sigma_0 \dots \sigma_n) = \tau(q)(\sigma_0) \overline{\mathfrak{G}_{\omega(a)}}(\sigma_1 \dots \sigma_n).$$

On dira que deux transducteurs initiaux \mathfrak{G}_q et $\mathfrak{G}'_{q'}$ sont *équivalents* si leurs actions $\overline{\mathfrak{G}_q}$ et $\overline{\mathfrak{G}'_{q'}}$ sur \mathcal{T}_Σ coïncident. Il existe une forme normale de tout transducteur fini, donnée par le résultat suivant :

LEMMA 1.16 (théorème 4.1 du chapitre XII de [Eil74]). *Soit \mathfrak{G} un transducteur initial fini. Alors il existe un unique transducteur initial \mathfrak{G}' équivalent à \mathfrak{G} et possédant un nombre minimal d'états. (On l'appelle le transducteur minimal associé à \mathfrak{G}).*

Si \mathfrak{G} est un transducteur fini, on définit $G(\mathfrak{G})$ comme le groupe engendré par les $\overline{\mathfrak{G}_q}$, où q parcourt l'ensemble des états de \mathfrak{G} , et on appelle $G(\mathfrak{G})$ *groupe à automates*. Le résultat suivant est bien connu, et remonte au moins à Jiří Hořeš, au début des années 60 [Hoř63] :

PROPOSITION 1.17. *Soient \mathfrak{G}_q et $\mathfrak{G}'_{q'}$ deux transducteurs initiaux finis sur le même alphabet Σ . Alors $(\overline{\mathfrak{G}_q})^{-1}$ et $\overline{\mathfrak{G}_q} \circ \overline{\mathfrak{G}'_{q'}}$ peuvent être représentés par des transducteurs initiaux finis.*

FIG. 1.3. Le transducteur minimal associé à $\bar{\Gamma}$

En général, deux transducteurs différents peuvent engendrer des groupes isomorphes. Par exemple, considérons le transducteur au milieu de la figure 1.2, associé au groupe $\bar{\Gamma}$ de la section 2.1. Le groupe qu'il engendre est isomorphe (en fait, même conjugué dans $\text{Aut } \mathcal{T}$) au groupe engendré par le transducteur de la figure 1.3, à deux états, sur le même alphabet $\Sigma = \{1, 2, 3\}$. On peut le vérifier en notant que les transformations \tilde{t}, \tilde{a} satisfont les mêmes relations récursives que t, a de l'automate de la figure 1.2. Ici ε est le 3-cycle $(1, 2, 3) \in \mathfrak{S}_3$. Les transducteurs $\mathfrak{G}_{\tilde{t}}$ et $\mathfrak{G}_{\tilde{a}}$ agissent ainsi :

$$\begin{aligned}\overline{\mathfrak{G}_{\tilde{t}}}(3 \dots 3 \sigma_m \dots \sigma_n) &= 3 \dots 3 \varepsilon(\sigma_m) \dots \varepsilon(\sigma_n) && \text{où } \sigma_m \neq 3, \\ \overline{\mathfrak{G}_{\tilde{a}}}(\sigma_0 \dots \sigma_n) &= \varepsilon(\sigma_0) \dots \varepsilon(\sigma_n).\end{aligned}$$

En revanche, pour le transducteur de la figure 1.2, on a

$$\begin{aligned}\overline{\mathfrak{G}_t}(3 \dots 3 \sigma_m \dots \sigma_n) &= 3 \dots 3 \varepsilon(\sigma_m) \sigma_{m+1} \dots \sigma_n && \text{où } \sigma_m \neq 3, \\ \overline{\mathfrak{G}_a}(\sigma_0 \dots \sigma_n) &= \varepsilon(\sigma_0) \sigma_1 \dots \sigma_n.\end{aligned}$$

On peut considérer les automorphismes suivants de \mathcal{T} :

DEFINITION 1.18. Un automorphisme g de \mathcal{T} est *fini* si son portrait n'est non-trivial qu'en un nombre fini de sommets. Il est *dirigé* selon e , où e est un chemin géodésique infini, si son portrait est trivial sur e et sur les sommets à distance 2 ou plus de e . Il est *à automates* s'il existe un transducteur initial le représentant.

PROPOSITION 1.19. *Si g est un automorphisme fini, il est à automates.*

Si g est un automorphisme dirigé ; si sa direction est un mot (infini) e périodique ; et si les étiquetages à distance 1 de e forment une suite périodique, alors g est à automates.

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord que g est fini. Soit \mathcal{U} la plus petite partie connexe de \mathcal{T} contenant \emptyset et le support du portrait de g . Clairement \mathcal{U} est un ensemble fini. On construit le transducteur initial \mathfrak{G} comme suit : son ensemble de sommets est $\mathcal{U} \cap \{\infty\}$. Son ensemble d'arêtes est celui de \mathcal{U} , avec en plus des arêtes de tous les sommets de \mathcal{U} de degré inférieur à d vers ∞ , et d boucles de ∞ à lui-même. L'étiquetage des sommets est donné par le portrait de g , avec l'étiquette 1 pour le sommet ∞ . Les arêtes prennent leurs étiquettes de \mathcal{T} , de sorte qu'en chaque sommet il y ait d arêtes montrant tous les éléments de Σ . L'état initial est \emptyset .

Si g est dirigé, soit e sa direction, et supposons que $e_i = e_{i+N}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Supposons de plus que les étiquettes à distance 1 de e soient aussi N -périodiques. On construit le transducteur initial \mathfrak{G} comme suit : il a $dN + 1$ sommets, notés (x, i) pour $x \in \Sigma$ et $0 \leq i < N$ et ∞ . Il y a une arête de (e_i, i) à $(x, i + 1 \bmod N)$ étiquetée x pour tous les $x \in \Sigma$, et d arêtes de ∞ à lui-même et de (x, i) à ∞ pour tous les $x \neq e_i$. L'étiquetage du sommet (x, i) est celui du sommet $e_0 e_1 \dots e_{i-1} x$ dans le portrait de g . L'état initial est $(e_{N-1}, 0)$. \square

Groupes à branches

Après ses premiers travaux (répondant aux questions de Burnside et Milnor), Rosislav Grigorchuk a mis en évidence une propriété fondamentale de certains groupes agissant sur des arbres : il s'agit d'une propriété d'auto-similarité, appelée *branchedness* en anglais, qu'on pourrait traduire par groupes à branches. Elle n'est apparue explicitement qu'en 1997 dans un chapitre de Grigorchuk [Gri00].

DEFINITION 2.1. Soit $G < \text{Aut } \mathcal{T}$ un groupe. G est dit à *branches faibles* si tous les stabilisateurs rigides $\text{Rist}_G(\sigma)$, définis en (8), sont infinis.

G est dit à *branches* s'il est sphériquement transitif, et si $\text{Rist}_G(n)$ est d'indice fini dans G pour tout n .

G est dit à *branches régulières* s'il contient un sous-groupe normal d'indice fini $K < \text{Stab}_G(1)$ tel que

$$K^\Sigma < \psi(K).$$

Du fait que $\text{Rist}_G(n)$ est un produit direct de d^n groupes, où $d = |\Sigma|$, on peut reformuler la définition ainsi :

LEMMA 2.2. G est à branches si et seulement si il existe une famille $\{K_n\}$ de sous-groupes d'indice fini de G tels qu'on ait $(K_{n+1})^\Sigma < \psi(K_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

LEMMA 2.3. Si G est fractal et à branches régulières, alors il est à branches. Si G est à branches, alors il est à branches faibles.

DÉMONSTRATION. Supposons que G est à branches régulières sur le sous-groupe K . On peut clairement voir K^{Σ^n} , à travers ψ_n , comme un sous-groupe de $\text{Rist}_G(n)$; il est d'indice dans G^{Σ^n} , donc $\text{Rist}_G(n)$ est d'indice fini dans G . La deuxième affirmation suit du fait qu'un groupe à branches est sphériquement transitif, donc infini, et que d'indice fini dans un groupe infini est logiquement plus fort que infini. \square

En fait, tous les exemples qu'on considérera sont à branches régulières. Cela équivaut à dire que dans le lemme 2.2 on peut supposer que tous les K_n coïncident.

On voit ainsi les diverses récursivités entrer en jeu : l'arbre Σ^* est récursif puisque ses sous-arbres $\sigma\Sigma^*$ sont isomorphes à lui-même pour tout $\sigma \in \Sigma^*$; les groupes peuvent l'être dans le sens qu'ils contiennent un sous-groupe K qui contient géométriquement un produit direct de copies de lui-même ; et le spectre de certains de ces groupes peut aussi être un ensemble fractal, voir [BG99b].

L'existence d'un sous-groupe K avec les propriétés ci-dessus implique ceci : soit X une transversale de K dans G et Y une transversale de K^Σ dans K . On a alors naturellement un portrait à branches de tout élément (différent du portrait défini en 1.6) : le sommet \emptyset est étiqueté par un élément de $X \times Y$ et chacun des sommets suivants est étiqueté par un élément de Y . On le définit ainsi :

DEFINITION 2.4. Soit $g \in G$ un élément d'un groupe à branches régulières. Son *portrait à branches* se définit ainsi : on écrit $g = g_\emptyset x$ avec $g_\emptyset \in K$ et $x \in X$, et on étiquette la racine par x . Ensuite on écrit inductivement $g_\sigma = (g_{\sigma 0}, g_{\sigma 1}, \dots)_y$ pour des $g_{\sigma i} \in K$ (où i parcourt Σ) et $y \in Y$. On étiquette le sommet σ par y .

De nouveau, on présente des exemples pour le groupe \mathfrak{G} de Grigorchuk. Ici \mathfrak{G}/K est un groupe d'ordre 16 dont le centre est d'ordre 2, et $K/(K \times K)$ est un groupe cyclique d'ordre 4, engendré par $(ab)^2$.

Dans ce langage, la suite centrale descendante de \mathfrak{G} peut s'exprimer ainsi : $\gamma_2(\mathfrak{G})$ contient tous les éléments dont le portrait à branches a son X -étiquette dans le centre de \mathfrak{G}/K et des Y -étiquettes quelconques ; $\gamma_3(\mathfrak{G})$ contient tous les éléments dont le portrait à branches a X -étiquette triviale, Y -étiquette à la racine une puissance de $(ab)^4$, et autres Y -étiquettes quelconques ; etc. Le résultat précis pour les exemples de groupe \mathfrak{G} et $\tilde{\mathfrak{G}}$ est donné dans [BG00], et est reproduit dans le théorème 6.13.

Le fait d'être un groupe à branches permet d'établir des critères précis déterminant si un groupe est juste-infini, ou juste non-résoluble. On rappelle d'abord ces notions.

DEFINITION 2.5. Un groupe G est *juste-infini* s'il est infini, mais si tous les quotients stricts sont finis ; ou, de façon équivalente, si tous les sous-groupes normaux de G sont indice fini dans G .

Un groupe G est *juste non-résoluble* s'il n'est pas résoluble, mais si tous ses quotients stricts le sont.

On note d'emblée que pour vérifier qu'un groupe G est juste-infini (respectivement juste non-résoluble), il suffit de vérifier que tous les sous-groupes normaux de la forme $\langle g \rangle^G$ sont d'indice fini (respectivement de quotient résoluble).

PROPOSITION 2.6. Soit G un groupe à branches régulières sur K . Alors

- G est juste-infini si et seulement si $|K : K'| < \infty$;
- G est juste non-résoluble si et seulement si $G/K_{(1)}$ est résoluble, où $K_{(1)}$ désigne $\psi(K) < G^\Sigma$.

En particulier, si d est premier, tout sous-groupe à branches régulières du pro- d -Sylow $\text{Aut}_*(\mathcal{T})$ est juste non-résoluble.

2.1. Exemples Principaux

Les premiers exemples de groupes de Burnside [Bur02] (c'est-à-dire de groupes infinis de type fini et de torsion) ont été trouvés par Evgeniï Golod en 1964 [Gol64, Gol68]. Depuis lors, de nombreux mathématiciens, dont Sergei Alëshin [Ale72], Vitalii Sushchanskiï [Suš79], Alexander Ol'shanskiï [?], et Narain Gupta et Saïd Sidki [GS83a], ont découvert d'autres tels exemples.

On se concentre sur les groupes agissant sur un arbre régulier, correspondant à la construction d'Alëshin. Dans cette section, on décrit les exemples de groupes $\mathfrak{G}, \tilde{\mathfrak{G}}, \Gamma, \bar{\Gamma}, \overline{\bar{\Gamma}}$ étudiés dans [BG99b, BG99a]. Seul le premier exemple, \mathfrak{G} , sera l'objet d'un chapitre plus approfondi.

On prend d'abord $d = 2$, et on définit les transformations suivantes : a est l'automorphisme permutant les deux branches supérieures de \mathcal{T}_2 . On définit récursivement b comme l'automorphisme de \mathcal{T}_2 agissant comme a sur la branche de gauche et comme c sur la branche de droite, c comme l'automorphisme de \mathcal{T}_2 agissant comme a sur la branche de gauche et comme d sur la branche de droite, et d comme l'automorphisme de \mathcal{T}_2 agissant comme 1 sur la branche de gauche et comme b sur la branche de droite, En formules, cela revient à poser

$$\begin{aligned} b(0x\sigma) &= 0\bar{x}\sigma, & b(1\sigma) &= 1c(\sigma), \\ c(0x\sigma) &= 0\bar{x}\sigma, & c(1\sigma) &= 1d(\sigma), \\ d(0x\sigma) &= 0x\sigma, & d(2\sigma) &= 1b(\sigma), \end{aligned}$$

où on a $\bar{1} = 0$ et $\bar{0} = 1$. Notons qu'ici, pour des raisons historiques, on a gardé $\Sigma = \{0, 1\}$, et non $\{1, 2\}$ comme on le ferait selon les définitions précédentes.

\mathfrak{G} est le groupe engendré par $\{a, b, c, d\}$. On vérifie instantanément que ces générateurs sont d'ordre 2 et que $\{1, b, c, d\}$ est un groupe de Klein ; on peut donc se passer d'un quelconque des générateurs parmi b, c, d .

On peut aussi définir les automorphismes $\tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{d}$ de \mathcal{T}_2 , par les formules

$$\begin{aligned}\tilde{b}(0x\sigma) &= 0\bar{x}\sigma, & \tilde{b}(1\sigma) &= 1\tilde{c}(\sigma), \\ \tilde{c}(0\sigma) &= 0\sigma, & \tilde{c}(1\sigma) &= 1\tilde{d}(\sigma), \\ \tilde{d}(0\sigma) &= 0\sigma, & \tilde{d}(1\sigma) &= 1\tilde{b}(\sigma).\end{aligned}$$

Le groupe $\tilde{\mathfrak{G}}$ est le groupe engendré par $\{a, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{d}\}$. Clairement, ces générateurs sont encore d'ordre 2, et $\{\tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{d}\}$ engendre un groupe abélien élémentaire d'ordre 8.

On se bornera à mentionner que $\tilde{\mathfrak{G}}$ contient \mathfrak{G} comme $\langle a, \tilde{b}\tilde{c}, \tilde{c}\tilde{d}, \tilde{d}\tilde{b} \rangle$, mais aussi des éléments d'ordre infini, comme $a\tilde{b}\tilde{c}\tilde{d}$, qui est un \acute{n} additionneur z (voir [BORT96]). L'article [BG99a] contient bien plus d'information sur $\tilde{\mathfrak{G}}$: une présentation récursive, aussi dite *L-présentation* (voir la section 6.2), une preuve que sa croissance est sous-exponentielle, etc.

L'autre famille d'exemples qu'on considère est construite sur l'arbre \mathcal{T}_3 , pour $d = 3$. On définit a comme l'automorphisme de \mathcal{T}_3 permutant les trois branches supérieures de \mathcal{T}_3 , et les automorphismes r, s, t fixant le premier niveau Σ , et agissant sur le sous-arbre de gauche comme a , sur le sous-arbre du milieu comme $1, a, a^2$ respectivement, et sur le sous-arbre de droite comme eux-mêmes. En formules, si on adopte la convention que $\bar{1} = 2, \bar{2} = 3, \bar{3} = 1$, on a

$$\begin{aligned}r(1x\sigma) &= 1\bar{x}\sigma, & r(2x\sigma) &= 2\bar{x}\sigma, & r(3\sigma) &= 3t(\sigma), \\ s(1x\sigma) &= 1\bar{x}\sigma, & s(2x\sigma) &= 2x\sigma, & s(3\sigma) &= 3t(\sigma), \\ t(1x\sigma) &= 1\bar{x}\sigma, & t(2x\sigma) &= 2\bar{x}\sigma, & t(3\sigma) &= 3t(\sigma).\end{aligned}$$

On définit ainsi les groupes $\Gamma = \langle a, r \rangle$, $\bar{\Gamma} = \langle a, s \rangle$ et $\bar{\bar{\Gamma}} = \langle a, t \rangle$. Le groupe Γ a été étudié par Narain Gupta et Jacek Fabrykowski [FG85, FG91]. Ils affirment, dans le premier article, que Γ est de croissance intermédiaire. Cette démonstration semble malheureusement incorrecte, et le deuxième article tente d'y remédier.

Le groupe $\bar{\Gamma}$ n'est pas un groupe à branches, bien qu'il soit faiblement à branches. Il est juste non-résoluble, et la structure de ses sous-groupes est relativement bien comprise — voir [BG99a].

Le groupe Γ a été étudié par Narain Gupta et Saïd Sidki [GS84, GS83b, GS83a]. Ses propriétés algébriques (en particulier, son groupe d'automorphismes) ont été bien déterminées [Sid87a] : c'est un 3-groupe infini, on connaît sa suite centrale descendante, etc. Saïd Sidki affirme dans [Sid87b] pouvoir déterminer une *L-présentation* (voir la section 6.2), bien qu'il n'y ait aucune formulation explicite.

On verra dans la dernière partie de ce travail que ces trois groupes sont de croissance intermédiaire.

Une généralisation de ces deux types de groupes a été introduite par Rostislav Grigorchuk dans [Gri00], section 8. Il s'agit des *groupes spéciaux*, dont on se borne ici à rappeler la définition (en la réduisant au cas des arbres homogènes, et non généralement sphériquement transitifs).

DEFINITION 2.7. Soit R un sous-groupe de \mathfrak{S}_Σ , soit D un ensemble fini, et soit $\{\omega_{x,k}^n\}_{x \in D, k \in \Sigma \setminus \{d\}, n \in \mathbb{N}}$ une famille d'éléments de \mathfrak{S}_Σ . Comme toujours, on fait agir \mathfrak{S}_Σ sur Σ^* en n'agissant que sur le premier symbole des suites. Les données $\omega_{x,k}^n$ munissent D d'une action sur Σ^* comme suit : pour $x \in D$ et une suite $\sigma = d \dots d\sigma_n \tau \in \Sigma^*$, on a

$$x(d \dots d\sigma_n \tau) = d \dots d\sigma_n \omega_{x, \sigma_n}^n(\tau),$$

où σ_n est le premier symbole différent de d .

Un *groupe spécial* est un groupe de la forme $\langle R, D \rangle$, pour des ensembles R et D agissant comme spécifié ci-dessus.

Croissance dans les groupes

Se chapitre sert d'introduction à la croissance des groupes et des espaces homogènes ; il sera utilisé au chapitre 4 où on étudiera la croissance des espaces homogènes associés à un sous-groupe parabolique, dans le chapitre 6 où on décrira des bornes sur la croissance du groupe de Grigorchuk \mathfrak{G} , et dans le chapitre 14, où on montrera des résultats de croissance pour une large famille de groupes.

Dans tout ce chapitre, on supposera implicitement que G est un groupe de type fini.

DEFINITION 3.1. Soit G un groupe engendré par un ensemble fini S , et soit X un espace sur lequel G agit transitivement. Un *poids* est une fonction $\omega : S \rightarrow \mathbb{R}_+^*$. Le poids s'étend naturellement à une fonction $|\cdot| : G \rightarrow \mathbb{R}_+$, toujours appelée poids, par

$$|g|_\omega = \min\{\omega(s_1) + \dots + \omega(s_n) \mid g = s_1 \dots s_n \text{ avec } s_i \in S\}.$$

La *croissance* de X en $x \in X$ est la fonction $\gamma_\omega^x : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{N}$ définie par

$$\gamma_\omega^x(n) = |\{gx \in X \mid |g|_\omega \leq n\}|.$$

Lorsque ω n'est pas spécifié, on prend le poids standard $\omega(s) \equiv 1$ et on n'écrit que $\gamma_{G,S}^x$. La *croissance* de G est la croissance en $1 \in G$ du G -ensemble G agissant sur lui-même par multiplication à gauche.

Par exemple, la croissance de \mathbb{Z} engendré par $S = \{1, -1\}$ est $\gamma_{G,S}(n) = 2n + 1$, car on peut exprimer tout entier de l'intervalle $[-n, n]$ comme un mot de longueur au plus n en S . La croissance du \mathbb{Z} -module $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$, elle, est $\gamma_{G,S}^0(n) = \min\{2n + 1, \ell\}$.

On remarque que la donnée de S fini et $\omega : S \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ équivaut à la donnée d'une fonction $\omega : G \rightarrow \mathbb{R}_+$ de support fini. C'est la raison pour laquelle on ne spécifie pas S dans la notation γ_ω^x .

3.1. Séries de croissance

La croissance d'un groupe G peut être étudiée de façon exacte. Pour ce faire, on considère généralement le poids standard $\omega(s) \equiv 1$, et on forme la série formelle

$$\Gamma_G^S(t) = \sum_{n \geq 0} \gamma_{G,S}(n)t^n \in \mathbb{Z}[[t]].$$

On peut se demander si une forme fermée existe pour les coefficients $\gamma_{G,S}(n)$ ou pour la série Γ_G^S , vue comme une fonction analytique. À titre d'exemple, on a :

THEOREM 3.2 (Benson [Ben83]). *Soit G un groupe contenant un sous-groupe abélien d'indice fini, et engendré par un ensemble fini S . Alors la fonction $\Gamma_G^S(t)$ est rationnelle (c'est-à-dire appartient à $\mathbb{Z}(t)$).*

Ce résultat a été généralisé par Fabrice Liardet [Lia96].

On a aussi :

THEOREM 3.3 (Gromov [GH90, chapitre 9]). *Soit G un groupe hyperbolique au sens de Gromov, et engendré par un ensemble fini S . Alors la fonction $\Gamma_G^S(t)$ est rationnelle.*

On ne connaît pas d'autres classes de groupes ayant une série de croissance rationnelle pour tout système de générateurs, bien qu'il soit conjecturé que ce soit le cas pour le groupe de Heisenberg $\langle x, y \mid [x, y] \text{ central} \rangle$.

Il existe aussi des exemples isolés de groupes pour lesquels la série Γ_G^S est algébrique, mais pas rationnelle [Par92].

3.2. Croissance asymptotique

On remarque que la fonction de croissance dépend fortement du choix de S et du poids ω ; il en va de même pour la série de croissance Γ_G^S , puisque pour certains groupes (des groupes nilpotents de rang 2) elle est rationnelle pour un certains système de générateurs, et transcendante pour un autre [Sto96]. Si on veut un objet intrinsèque au groupe, c'est-à-dire indépendant de S et ω , on ne peut considérer que la classe de γ_ω^x relativement à une relation d'équivalence. La notion d'équivalence la plus fine est la suivante :

DEFINITION 3.4. Soient $f, g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{N}$ deux fonctions. On dit que f est *dominée* par g , ce qu'on note $f \lesssim g$, s'il existe une constante $C \in \mathbb{N}$ telle que $f(n) \leq g(Cn)$. On dit que f et g sont *équivalentes*, noté $f \sim g$, si $f \lesssim g$ et $g \lesssim f$.

LEMMA 3.5. Soit X un G -ensemble. Soient S et S' deux systèmes de générateurs finis de G , munis de poids ω et ω' , et soient x, x' deux éléments de X . Alors les fonctions de croissance γ_ω^x et $\gamma_{\omega'}^{x'}$ sont équivalentes.

DÉMONSTRATION. On pose d'abord $B = \max_{s \in S} |s|_{\omega'} / \omega(s)$. Alors on a $|g|_{\omega'} \leq B|g|_\omega$, et donc $\gamma_\omega^x(n) \leq \gamma_{\omega'}^x(Bn)$.

Soit maintenant $p \in G$ tel que $px' = x$, et soit $B' = |p|_{\omega'}$. Comme pour tout gx on peut écrire $gx = gpx'$, on a $\gamma_{\omega'}^x(n) \leq \gamma_{\omega'}^{x'}(n + B')$.

Finalement, si on pose $M = \min\{\omega'(s) \mid s \in S'\}$, on a $\gamma_{\omega'}^x(t) = 1$ pour $t \in [0, M[$, et on peut donc écrire $\gamma_{\omega'}^x(n) \leq \gamma_{\omega'}^{x'}(n(1 + B'/M))$.

En combinant les inégalités ci-dessus, on a $\gamma_\omega^x(n) \leq \gamma_{\omega'}^{x'}(Cn)$, avec $C = B(1 + B'/M)$, et donc $\gamma_\omega^x \lesssim \gamma_{\omega'}^{x'}$. Par symétrie, on a donc $\gamma_\omega^x \sim \gamma_{\omega'}^{x'}$. \square

On notera désormais γ_X la classe d'équivalence des fonctions de croissance de X pour la relation \sim .

LEMMA 3.6. Soit X un G -ensemble. On a alors $\gamma_X \lesssim 2^n$.

DÉMONSTRATION. Soit S un système de générateurs fini pour G , et ω le poids standard sur S . On a alors $\gamma_\omega^x(n) \leq |S|^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in X$, et donc $\gamma_X \lesssim 2^{n \log_2 |S|} \sim 2^n$. \square

DEFINITION 3.7. Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{N}$ une fonction. S'il existe un entier D tel que $f \sim n^D$, on dit que f est *polynômiale* ; si $n^D \lesssim f$ pour tout D on dit que f est *superpolynômiale*.

Si $f \sim 2^n$, on dit que f est *exponentielle*, alors que si $f \lesssim 2^n$ on dit que f est *sous-exponentielle*.

Finalement, si f est à la fois superpolynômiale et sous-exponentielle, elle est dite *intermédiaire*.

On constate que ces notions ne dépendent que de la classe d'équivalence de f . On a les résultats suivants :

THEOREM 3.8 (Gromov [Gro81a]). Si γ_G n'est pas superpolynômiale, alors γ_G est polynômiale, et G est virtuellement nilpotent.

On a même une formule pour le degré de γ_G , due à Yves Guivarc'h et Hyman Bass [Gui70, Bas72] : si $\{G_n\}_{n \geq 1}$ est la suite centrale descendante de G et $d_n = \dim(G_n/G_{n+1} \otimes \mathbb{Q})$ est le rang du n -ième quotient, on a

$$\deg \gamma_G = \sum_{n \geq 1} n d_n.$$

Il est par ailleurs hautement non-trivial qu'il existe des groupes à croissance intermédiaire ; par exemple, un résultat de Jacques Tits [Tit72] montre qu'un groupe linéaire est soit de croissance polynômiale, soit de croissance exponentielle. Le premier groupe de croissance intermédiaire a été découvert par Rostislav Grigorchuk [Gri83], en réponse à une célèbre question de John Milnor [Mil68b].

PROPOSITION 3.9. *Soit G un groupe de type fini, H un sous-groupe de type fini de G , et G/I un G -espace homogène. Alors $\gamma_H \lesssim \gamma_G$ et $\gamma_{G/I} \lesssim \gamma_G$.*

Si de plus H est normal d'indice fini, alors $\gamma_G \lesssim [G : H]\gamma_H$; et si I est fini, alors $\gamma_G \lesssim |I|\gamma_{G/I}$.

DÉMONSTRATION. On choisit un système S de générateurs de G qui contient un système T de générateurs de H , on fixe un poids ω sur S , et on note $|\cdot|_S$ le poids induit sur G et sa projection sur G/I , et $|\cdot|_T$ le poids induit sur H . Clairement $\{g \in H \mid |g|_T \leq n\} \subset \{g \in G \mid |g|_S \leq n\}$ et $\{gI \in G/I \mid |g|_S \leq n\} \subset \{g \in G \mid |g|_S \leq n\}$, ce qui montre la première partie.

On suppose maintenant H normal d'indice fini, avec une transversale X dans G . On prend un système de générateurs T de H invariant par X , et on prend $S = T \cup X$ comme générateurs de G . Tout élément de G s'écrit alors de manière minimale sous la forme $t_1 t_2 \dots t_n x$ pour des $t_i \in T$ et $x \in X$. On a donc $\{g \in G \mid |g|_S \leq n+1\} \subset \{g \in H \mid |h|_T \leq n\} \times X$, donc $\gamma_G(n+1) \leq |X|\gamma_H(n)$.

On suppose enfin I fini. Considérons la boule $\{g \in G \mid |g|_\omega \leq n\}$. Elle se projette dans G/I avec au plus $|I|$ éléments dans chaque fibre, d'où $\gamma_G(n) \leq |I|\gamma_{G/I}(n)$. \square

La proposition suivante ne sera pas utilisée, mais illustre le rapport entre les séries de croissance et les groupes à automates :

PROPOSITION 3.10. *Soit $G(\mathfrak{G})$ un groupe à automates. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathfrak{G}^{(n)}$ le produit de n copies du transducteur \mathfrak{G} [GC71], et soit $\delta(n)$ le nombre minimal d'états de $\mathfrak{G}^{(n)}$. Alors $\gamma_G \sim \delta$.*

DÉMONSTRATION. Les états de \mathfrak{G} sont en bijection avec un système de générateurs S de $G(\mathfrak{G})$, et les états de $G(\mathfrak{G})^{(n)}$ sont décrits par S^n . Si deux mots de S^n induisent le même élément du groupe, on peut diminuer le nombre d'états de $G(\mathfrak{G})^{(n)}$ en combinant ces deux états en un seul. Ainsi, pour l'automate minimisé associé à $G(\mathfrak{G})^{(n)}$, ses états sont en bijection avec l'image de S^n dans $G(\mathfrak{G})$. \square

Sous-groupes paraboliques



n décrit dans ce chapitre le contenu de l'article [BG99a], écrit avec Rostislav Grigorchuk. Il contient autant des résultats algébriques sur les exemples de groupes de la section 2.1 que des compléments à l'article [BG99b].

DEFINITION 4.1. Soit G un groupe à branches. On considère son action sur l'arbre Σ^* , et on choisit un chemin géodésique (c'est-à-dire s'éloignant continuellement de la racine \emptyset dans Σ^*), noté e . Le sous-groupe parabolique associé est le stabilisateur de e dans G , noté P_e .

La terminologie vient du fait suivant : un chemin géodésique équivaut à un point du bord de l'arbre, $\Sigma^\mathbb{N}$. Dans la définition habituelle, un sous-groupe P de G est parabolique s'il est le stabilisateur d'un point du bord d'un G -espace convenable, par exemple l'isotropie d'un point de $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ pour une action de G sur l'espace hyperbolique \mathbb{H} .

Clairement, par ailleurs, si on note e_n le point à distance n de \emptyset sur e , on considère $P_n = \text{Stab}_G(e_n)$, et on a

$$P_e = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} P_n.$$

On a défini les portraits à branches en 2.4. Cette décomposition d'un élément $g \in G$ selon l'arbre correspond à une décomposition du groupe G en extensions par des groupes finis. Le résultat suivant est prouvé dans [BG99a] dans le cas particulier des exemples de la section 2.1.

THEOREM 4.2. Soit G un groupe fractal à branches régulières, et soit e le chemin d^∞ le plus à droite dans \mathcal{T} . Alors il existe une famille finie de sous-groupes $G = G_1 > \dots > G_n = G_{n+1}$ tels qu'on ait

$$\psi(G_i \cap \text{Rist}_G(1)) = G_{i+1}^\Sigma$$

et des suites exactes

$$1 \longrightarrow G_{i+1}^\Sigma \longrightarrow G_i \longrightarrow Q_i \longrightarrow 1$$

avec quotients Q_i finis, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

Si on pose $P_i = P \cap G_i$, on a de plus

$$\psi(P_i \cap \text{Rist}_G(1)) = G_{i+1}^{d-1} \times P_{i+1}$$

et des suites exactes

$$1 \longrightarrow G_{i+1}^{d-1} \times P_{i+1} \longrightarrow P_i \longrightarrow R_i \longrightarrow 1$$

avec quotients R_i finis, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

Un des intérêts de ce résultat est qu'il permet de déterminer les orbites de P sur G , et donc aussi sur G/P . On utilisera cela dans la section suivante.

Montrons toutefois d'abord la réalisation du théorème 4.2 pour le groupe \mathcal{G} . On a

$$\begin{aligned} 1 &\longrightarrow B \times B \longrightarrow G \longrightarrow \langle a, c \rangle \longrightarrow 1, \\ 1 &\longrightarrow K \times K \longrightarrow B \longrightarrow \langle b, b^a | (ab)^8 \rangle \longrightarrow 1, \\ 1 &\longrightarrow K \times K \longrightarrow K \longrightarrow \langle (ab)^2 | (ab)^8 \rangle \longrightarrow 1. \end{aligned}$$

La décomposition de P est similaire : si on pose $P = \text{Stab}_G(1^\infty)$, et $Q = P \cap B$, $R = P \cap K$, on a

$$\begin{aligned} 1 &\longrightarrow B \times Q \longrightarrow P \longrightarrow \langle c, (ac)^4 \rangle \longrightarrow 1, \\ 1 &\longrightarrow K \times R \longrightarrow Q \longrightarrow \langle b, (ac)^4 \rangle \longrightarrow 1, \\ 1 &\longrightarrow K \times R \longrightarrow R \longrightarrow \langle (ac)^4 \rangle \longrightarrow 1. \end{aligned}$$

DEFINITION 4.3. Soit G un groupe et H un sous-groupe. H est *faiblement maximal* si H est d'indice infini dans G , mais s'il n'existe pas de sous-groupe d'indice infini dans G contenant strictement H .

On montre alors :

PROPOSITION 4.4. Soit G un groupe à branches et soit P un sous-groupe parabolique. Alors P est faiblement maximal.

La croissance du G -espace P est aussi déterminée comme suit :

DEFINITION 4.5. Deux suites infinies $\sigma, \tau \in \Sigma^\mathbb{N}$ sont *confinales* s'il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sigma_n = \tau_n$ pour tout $n \geq N$.

La confinalité est une relation d'équivalence, et les classes d'équivalence sont appelées *classes de confinalité*.

Le résultat suivant est dû à Volodymyr Nekrashevych et Vitaliï Sushchanskiï :

PROPOSITION 4.6 ([NS99]). Soit G un groupe agissant sur l'arbre régulier \mathcal{T}_Σ , et supposons que pour tout élément g de G (ou, de façon équivalente, pour tout générateur) et toute suite infinie $\sigma \in \mathcal{T}_\Sigma$, les suites σ et $g\sigma$ diffèrent seulement en un nombre fini d'endroits. Alors les classes de confinalité de l'action de G sur $\partial\mathcal{T}_\Sigma$ sont des unions d'orbites. Si de plus $\text{Stab}_G(\sigma)$ contient l'automorphisme enraciné a permutant les d sous-arbres sous σ pour tout $\sigma \in \mathcal{T}$, alors les orbites de l'action sont les classes de confinalité.

La preuve du résultat suivant apparaît dans [BG99b] :

PROPOSITION 4.7. Soit $G < \text{Aut } \mathcal{T}$ un groupe satisfaisant les conditions de la proposition 4.6, et supposons que pour l'application $\Psi : g \mapsto (g_1, \dots, g_d)$ définie en (6) il y a des constantes λ, μ avec $\mu + 2\lambda < 2$ telles que $|g_i| \leq \lambda|g| + \mu$ pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$. Soit P un sous-groupe parabolique. Alors G/P , en tant que G -ensemble, est de croissance polynômiale de degré au plus $\log_{1/\lambda}(d)$. Si de plus G est sphériquement transitif et λ est minimal pour la propriété donnée, alors la fonction de croissance $\gamma_{G/P}^P(n)$ est équivalente à $n^{\log_{1/\lambda}(d)}$.

Ces notions sont aussi valables pour les graphes de Schreier associés aux espaces homogènes :

DEFINITION 4.8. Soit G un groupe engendré par un système S et P un sous-groupe. Le graphe de Schreier de (G, P) relativement à S est le graphe $\mathcal{S}(G, P, S) = (E, V)$, où

$$V = G/P$$

et

$$E = V \times S, \quad \alpha(v, s) = v, \quad \omega(v, s) = sv.$$

Au cas où P est normal dans G , il s'agit du graphe de Cayley de G/P . En règle générale, $\mathcal{S}(G, P, S)$ est un graphe $|S|$ -régulier, mais son groupe d'automorphismes n'est pas transitif sur ses sommets.

On sait, en revanche, que presque tous les graphes transitifs sont des graphes de Schreier. Plus précisément :

THEOREM 4.9 ([Lub95a]). Soit \mathfrak{G} un graphe régulier. Alors il existe un groupe G engendré par un ensemble S et un sous-groupe P tel que $\mathfrak{G} \cong \mathcal{S}(G, P, S)$ si et seulement si \mathfrak{G} contient un 1-facteur.

Cette dernière condition est vérifiée dès que \mathfrak{G} est de degré pair ou ne contient pas d'isthme.

4.1. Algèbres de Hecke

On décrira au chapitre suivant le spectre de l'opérateur de type Hecke de la représentation quasi-régulière de G sur l'espace $\ell^2(G/P)$. Plus généralement, on note $\rho_{G/H}$ la représentation de G sur l'espace $\ell^2(G/H)$.

DEFINITION 4.10. Le *commensurateur* d'un sous-groupe H de G est

$$\text{comm}_G(H) = \{g \in G \mid H \cap H^g \text{ est d'indice fini dans } H \text{ et } H^g\}.$$

En d'autres termes, si on fait agir H à gauche sur les classes à droite $\{gH\}$, on a

$$\text{comm}_G(H) = \{g \in G \mid H \cdot (gH) \text{ et } H \cdot (g^{-1}H) \text{ sont des orbites finies}\}.$$

PROPOSITION 4.11. *Si G est fractal et sphériquement transitif, alors $\rho_{G/P}$ est irréductible.*

On montre ce résultat en appliquant le critère suivant dû à George Mackey, c'est-à-dire en montrant que $\text{comm}_G(P) = P$.

THEOREM 4.12 (Mackey [Mac76, BH97]). *Soit G un groupe infini et soit H un sous-groupe de G . Alors $\rho_{G/H}$ est irréductible si et seulement si $\text{comm}_G(H) = H$.*

On remarque maintenant que la représentation $\rho_{G/P}$ est approximée par les représentations ρ_{G/P_n} , dans le sens que pour tout $g \neq 1$ dans G il existe un $n \in \mathbb{N}$ avec $\rho_{G/P_n}(g) \neq 1$. (Cette notion de convergence de représentations est celle utilisée dans [GZ97]).

Ces représentations ρ_{G/P_n} sont de dimension finie : on peut identifier l'espace homogène G/P_n à Σ^n , l'orbite de G au niveau n , donc ρ_{G/P_n} est de dimension d^n . On va étudier sa décomposition en irréductibles.

DEFINITION 4.13. Soit G un groupe et H un sous-groupe. L'*algèbre de Hecke* (aussi appelée l'*algèbre d'entrelacement*) $\mathcal{H}(G, H)$ est l'algèbre $\text{End}_{\ell^2(G)}(\ell^2(G/H))$. Elle peut être vue comme l'algèbre des fonctions (H, H) -biinvariantes sur G , avec le produit de convolution

$$(f \cdot g)(x) = \sum_{y \in G} f(xy)g(y^{-1}).$$

On peut donc penser à l'algèbre de Hecke comme à l'algèbre engendrée par les doubles classes dans $\ell^2(G)$. Le résultat suivant montre l'importance de l'algèbre de Hecke dans l'étude de la décomposition des représentations :

THEOREM 4.14 ([CR90], section 11D). *Soit G un groupe et H un sous-groupe. Alors $\mathcal{H}(G, H)$ est une algèbre semi-simple. Il y a une bijection canonique entre les composantes irréductibles de $\rho_{G/H}$ et les facteurs simples de $\mathcal{H}(G, H)$, qui ont les mêmes multiplicités.*

DEFINITION 4.15. Soit G un groupe et H un sous-groupe. La paire (G, H) est une paire de Gel'fand si toutes les sous-représentations irréductibles de $\rho_{G/H}$ ont multiplicité 1.

Il est clair que (G, H) est une paire de Gel'fand si et seulement si $\mathcal{H}(G, H)$ est abélienne (voir par exemple [CR90, exercice 18, page 306]). De plus, si c'est le cas, la décomposition de $\mathcal{H}(G, H)$ en facteurs simples est en bijection avec les doubles classes HgH de H dans G .

PROPOSITION 4.16. *Pour les cinq groupes de la section 2.1, le sous-groupe P_n a $(d-1)n+1$ orbites dans Σ^n : toutes celles de la forme $d^i x \Sigma^{n-1-i}$ pour un $x \in \Sigma \setminus \{d\}$ et un $i \in \{0, \dots, n-1\}$, et le point fixe d^n .*

On a ainsi $\dim \mathcal{H}(G, P_n) = (d-1)n+1$. De plus, $\mathcal{H}(G, P_{n-1})$ est un sommant direct de $\mathcal{H}(G, P_n)$, donc son orthogonal est un sommant de dimension $d-1$, qui est abélien car de dimension 1 ou 2 (on rappelle que $\mathcal{H}(G, P_n)$ est semi-simple). On a ainsi montré :

THEOREM 4.17. *Pour les cinq groupes de la section 2.1, les paires (G, P_n) sont de Gel'fand. La décomposition de ρ_{G/P_n} en irréductibles contient $(d-1)n+1$ composantes, dont d de dimension 1 et $d-1$ de dimension d^i , pour tous les $i \in \{1, \dots, n-1\}$.*

4.2. Congruence Quantitative

Une autre nouveauté de l'article [BG99a] est l'usage systématique d'une propriété pour déterminer la structure de sous-groupes d'indice fini d'un groupe branché G en se ramenant à l'étude d'un groupe fini.

Si un groupe G a la propriété de congruence, il peut être bien approximé par ses quotients $G/\text{Stab}_G(n)$, dans le sens que pour tout voisinage fini de l'origine dans G on peut trouver un n suffisamment grand pour que ce voisinage apparaisse isomorphiquement dans $G/\text{Stab}_G(n)$.

On peut donner un sens précis au bien approximé de la remarque ci-dessus :

PROPOSITION 4.18 (bien congruence quantitative). *Soit G un groupe à branches régulières sur son sous-groupe K , engendré par le système fini S et ayant la propriété de congruence. Soit $\partial(g)$ la profondeur du S -portrait de $g \in G$ (voir la définition 1.6).*

Soit n le plus petit entier tel qu'on ait $\langle s \rangle^G \geq \text{Stab}_G(n)$ pour tous les générateurs $s \in S$. Soit m minimal tel que K' contienne $\text{Stab}_G(m)$.

Alors pour tout sous-groupe normal non-trivial N de G , et pour n'importe quel $g \in N$ non trivial, N contient $\text{Stab}_G(\partial(g) + m + n)$.

L'utilisation principale de ce résultat est le suivant : on veut connaître l'indice d'un certain sous-groupe $N = \langle g \rangle$. Une fois qu'on a déterminé les constantes m et n pour le groupe G , on n'a qu'à calculer $\partial(g)$ pour trouver un $\text{Stab}_G(p)$ contenu dans N . On sait alors que l'indice de N dans G est le même que celui de N dans $G/\text{Stab}_G(p)$, qui est un groupe fini ; encore mieux, les treillis de sous-groupes entre G et N et entre $G/\text{Stab}_G(p)$ et N sont isomorphes.

On peut donc se servir d'un programme de théorie des groupes, comme par exemple GAP [S⁺93], pour obtenir explicitement ce treillis. On donnera au chapitre 6 (dans la table 6.1) une partie du treillis des sous-groupes normaux d'indice fini dans \mathcal{G} . Remarquons que l'application du théorème 4.2 à \mathcal{G} a été réalisée grâce à cette méthode.

Spectres de représentations



es propriétés d'autosimilarité ne se limitent pas au groupe G et à l'arbre : on en voit aussi dans les n spectres de représentations ζ , comme suit :

PROPOSITION 5.1. Soit $\pi : G \rightarrow U(\mathcal{H})$ une représentation unitaire du groupe G dans l'espace de Hilbert \mathcal{H} , et soit S un système de générateurs symétrique et fini de G . Le spectre de la représentation π (pour le système de générateurs S) est le spectre de l'opérateur $\sum_{s \in S} \pi(s)$ sur \mathcal{H} .

On peut même pousser plus loin l'analyse du spectre en considérant la *mesure spectrale* associée à l'opérateur $M = \sum_{s \in S} \pi(s)$ sur \mathcal{H} . Rappelons que puisque M est un opérateur symétrique (et donc normal), il admet une décomposition spectrale, c'est-à-dire que pour tous les $x, y \in \mathcal{H}$ il existe une fonction $\sigma_{x,y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\langle M^n x, y \rangle = \int_{\mathbb{R}} t^n d\sigma_{x,y}(t)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par exemple, si \mathcal{H} est de dimension finie N , M est diagonalisable avec valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ et vecteurs propres v_1, \dots, v_N , et la fonction $\sigma_{x,y}$ est constante partout, sauf en les λ_i où elle augmente de $\langle x, v_i \rangle \langle y, v_i \rangle$. Plus généralement, les discontinuités de $\sigma_{x,y}$ ne peuvent se produire qu'aux valeurs propres de M .

Dans le cadre d'une représentation quasi-régulière de G sur $\ell^2(G/H)$, la mesure spectrale que l'on calcule est $\sigma_{\delta,\delta}$, où δ est la masse de Dirac en H , c'est-à-dire la fonction valant 1 sur la classe de H et 0 ailleurs.

Rostislav Grigorchuk et l'auteur calculent le spectre de la représentation quasi-régulière $\rho_{G/P}$ de plusieurs groupes à branches dans [BG99b], où G est un groupe à branches et P un sous-groupe parabolique (voir le chapitre précédent). Ils déterminent aussi la mesure spectrale dans ces cas-là.

Le calcul du spectre se fait ainsi : considérons le groupe Γ de Narain Gupta et Saïd Sidki (voir la section 2.1). Il est engendré par deux transformations a et t , où a est la permutation cyclique des trois branches supérieures de \mathcal{T}_3 , et t est défini inductivement comme fixant les trois sommets du premier niveau, et agissant comme a, a^{-1} et t sur les sous-arbres correspondants.

Si on note $L^2(\partial\mathcal{T})$ l'espace de fonctions sur le bord de l'arbre de carré intégrable pour la mesure de Bernouilli, on a $L^2(\partial\mathcal{T}) \cong L^2(\partial\mathcal{T})^3$ par l'isomorphisme ψ , et on peut écrire tout opérateur sur $L^2(\partial\mathcal{T})$ comme une matrice 3×3 . Cela donne

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad t = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}.$$

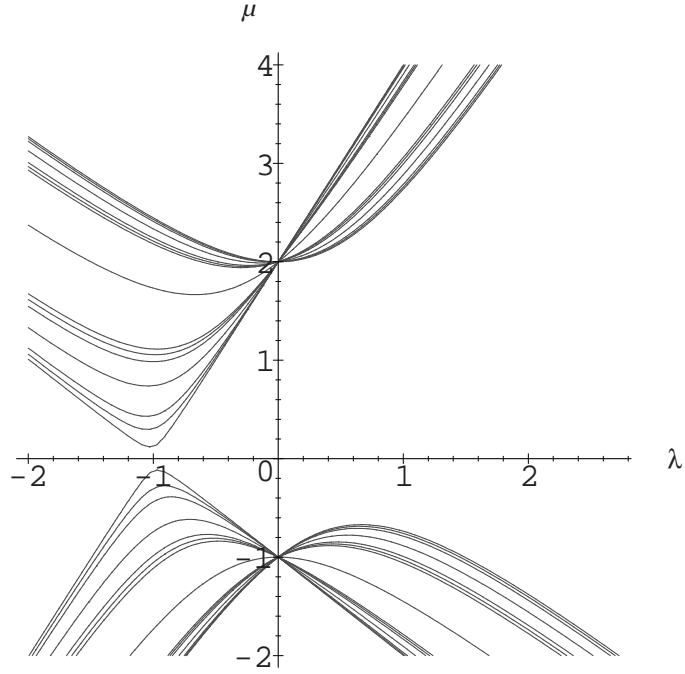
On veut à présent calculer le spectre de $a + a^{-1} + t + t^{-1}$. Plutôt que d'attaquer directement ce problème, on considère les quotients finis Γ_n de Γ , agissant sur Σ^n , et on pose

$$Q_n(\lambda, \mu) = \det(t + t^{-1} + \lambda(a + a^{-1}) - \mu),$$

où a, t sont des matrices $3^n \times 3^n$.

Posons

$$\begin{aligned} \alpha &= 2 - \mu + \lambda, & \beta &= 2 - \mu - \lambda, \\ \gamma &= \mu^2 - \lambda^2 - \mu - 2, & \delta &= \mu^2 - \lambda^2 - 2\mu - \lambda. \end{aligned}$$

FIG. 5.1. Les zéros de $Q_n(\lambda, \mu)$ pour Γ

On montre par récurrence que

$$\begin{aligned} Q_0(\lambda, \mu) &= 2 + 2\lambda - \mu = \alpha + \lambda, \\ Q_1(\lambda, \mu) &= (2 + 2\lambda - \mu)(2 - \lambda - \mu)^2 = (\alpha + \lambda)\beta^2, \\ Q_n(\lambda, \mu) &= (\alpha\beta\gamma^2)^{3^{n-2}} Q_{n-1}\left(\frac{\lambda^2\beta}{\alpha\gamma}, \mu + \frac{2\lambda^2\delta}{\alpha\gamma}\right) \quad (n \geq 2). \end{aligned}$$

Considérons maintenant les formes quadratiques

$$H_\theta = \mu^2 - \lambda\mu - 2\lambda^2 - 2 - \mu + \theta\lambda,$$

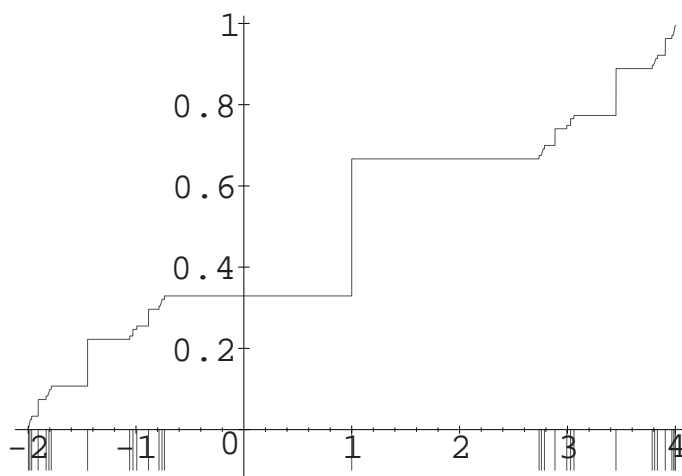
et la fonction $F : [-4, 5] \rightarrow [-4, 5]$ donnée par

$$F(\theta) = 4 - 2\theta - \theta^2.$$

Soit $X_2 = \{-1\}$, et itérativement $X_n = F^{-1}(X_{n-1})$ pour tous les $n \geq 3$. Remarquons que $|X_n| = 2^{n-2}$. Pour tout $n \geq 2$ on a la factorisation

$$(9) \quad |Q_n(\lambda, \mu)| = (2 + 2\lambda - \mu)(2 - \lambda - \mu)^{3^{n-1}+1} \prod_{\substack{2 \leq m \leq n \\ \theta \in X_m}} H_\theta^{3^{n-m}+1}.$$

Ainsi, d'après le résultat précédent, le spectre de G_n est formé de deux droites et d'une famille de $2^{n-1} - 1$ hyperboles H_θ avec $\theta \in X_2 \sqcup X_3 \sqcup \dots \sqcup X_n$. Le spectre de Γ est obtenu en résolvant $Q_n(1, \mu) = 0$, ce qu'on fait maintenant.

FIG. 5.2. La mesure spectrale associée à Γ

THEOREM 5.2. *Le spectre de π pour le groupe Γ est la clôture de l'ensemble*

$$\left\{ \begin{array}{ll} 4 & (\mu = 0) \\ 1 & (\mu = \frac{1}{3}) \\ 1 \pm \sqrt{6} & (\mu = \frac{1}{9}) \\ 1 \pm \sqrt{6 \pm \sqrt{6}} & (\mu = \frac{1}{3^3}) \\ 1 \pm \sqrt{6 \pm \sqrt{6 \pm \sqrt{6}}} & (\mu = \frac{1}{3^4}) \\ \dots & \end{array} \right\}.$$

Il est l'union d'un ensemble de Cantor de mesure de Lebesgue nulle symétrique autour de 1 et d'une famille dénombrable de points d'accumulation supportant toute la mesure spectrale empirique, qui a les valeurs indiquées en μ .

COROLLARY 5.3. *Il existe un graphe 4-régulier dont le spectre est l'ensemble décrit ci-dessus.*

Ce graphe n'est rien d'autre que le graphe de Schreier de Γ/P , pour un sous-groupe parabolique P . Il peut être décrit comme un n graphe de substitutions z . Une approximation en est représentée à la figure 5.3. C'est un objet fractal de dimension $\log_2(3)$, comme le montre la proposition suivante :

PROPOSITION 5.4. *La série de croissance du graphe de Schreier $\mathcal{S}(\Gamma, P, S)$ est*

$$F(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \gamma(n) t^n = \prod_{i \in \mathbb{N}} (1 + 2t^{2^i}).$$

C'est une fonction transcendante, dont le terme général $\gamma(n)$ a croissance asymptotique $n^{\log_2(3)}$.

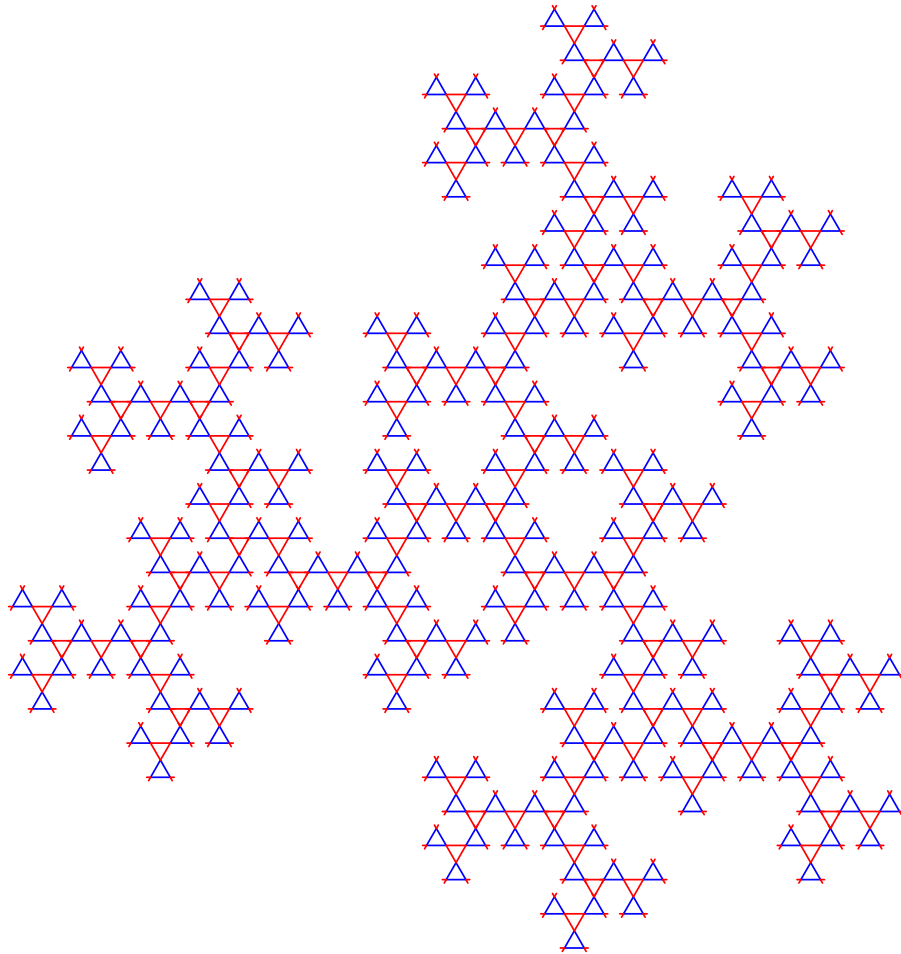


FIG. 5.3. Le graphe de Schreier de Γ_6 . Les arêtes rouges et bleues représentent les générateurs s et a .

Le premier groupe de Grigorchuk, \mathfrak{G}

Sn décrit ici le premier exemple de groupe à branches, conçu par Grigorchuk en 1980 comme réponse au problème de Burnside généralisé (n existe-t-il des groupes infinis de type fini dont tous les éléments sont d'ordre fini ?). Il a servi ensuite à bien d'autres choses, comme réponse à des questions de croissance [Mil68b], de classification de groupes juste-infinis [BG00], etc. Une référence précieuse pour ce groupe \mathfrak{G} est le chapitre 8 de [Har00] ; voir aussi [CMS98].

Parmi les résultats importants concernant \mathfrak{G} , dont certains seront élaborés par la suite :

- \mathfrak{G} est un groupe de type fini, infini et de 2-torsion ;
- \mathfrak{G} est fractal, et est à branches régulières sur son sous-groupe K défini ci-dessous ;
- \mathfrak{G} est de croissance intermédiaire, et est donc moyennable ;
- \mathfrak{G} est résiduellement fini, et plus précisément admet une suite naturelle de quotients $\mathfrak{G}_n = \mathfrak{G}/\text{Stab}_{\mathfrak{G}}(n)$, d'ordre $2^{5 \cdot 2^{n-3} + 2}$ pour $n \geq 3$ (et d'ordre $2^{2^n - 1}$ pour $n \leq 3$) l'approximant ;
- \mathfrak{G} agit fidèlement sur $\mathfrak{G}/P = \mathfrak{G}/\text{Stab}_{\mathfrak{G}}(1^\infty)$, qui est un espace homogène de croissance linéaire (voir la section 6.3) ;
- \mathfrak{G} agit fidèlement sur le bord $\partial\mathcal{T}$ de l'arbre \mathcal{T}_2 , et ses orbites sont les classes de conflinité (voir la proposition 4.6) ;
- \mathfrak{G} admet tout 2-groupe fini comme quotient ;
- \mathfrak{G} est de largeur finie (voir le théorème 6.13) ;
- \mathfrak{G} est juste-infini ;
- \mathfrak{G} n'a pas de présentation finie, mais a une L -présentation finie (voir le théorème 6.3).

6.1. Quelques sous-groupes de \mathfrak{G}

On introduit les sous-groupes suivants de \mathfrak{G} :

$$\begin{aligned} K &= \langle (ab)^2 \rangle^{\mathfrak{G}}, & L &= \langle (ac)^2 \rangle^{\mathfrak{G}}, & M &= \langle (ad)^2 \rangle^{\mathfrak{G}}, \\ \bar{B} &= \langle B, L \rangle, & \bar{C} &= \langle C, K \rangle, & \bar{D} &= \langle D, K \rangle, \\ T &= K^2 = \langle (ab)^4 \rangle^{\mathfrak{G}}, \\ T_{(m)} &= \underbrace{T \times \cdots \times T}_{2^m}, & K_{(m)} &= \underbrace{K \times \cdots \times K}_{2^m}, & N_{(m)} &= T_{(m-1)}K_{(m)}. \end{aligned}$$

THEOREM 6.1. *On a :*

- *Les stabilisateurs restreints satisfont*

$$\text{Rist}_{\mathfrak{G}}(n) = \begin{cases} D & \text{si } n = 1, \\ K_{(n)} & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

- *Les stabilisateurs de niveau satisfont*

$$\text{Stab}_{\mathfrak{G}}(n) = \begin{cases} H & \text{si } n = 1, \\ \langle D, T \rangle & \text{si } n = 2, \\ \langle N_{(2)}, (ab)^4(adabac)^2 \rangle & \text{si } n = 3, \\ \underbrace{\text{Stab}_{\mathfrak{G}}(3) \times \cdots \times \text{Stab}_{\mathfrak{G}}(3)}_{2^{n-3}} & \text{si } n \geq 4. \end{cases}$$

- Les suites dérivées de \mathfrak{G} et K satisfont $K^{(n)} = \text{Rist}_{\mathfrak{G}}(2n)$ pour tout $n \geq 2$, et $\mathfrak{G}^{(n)} = \text{Rist}_{\mathfrak{G}}(2n-3)$ pour tout $n \geq 3$.
- Il y a pour tout $\sigma \in \Sigma^n$ une surjection $\cdot|_{\sigma} : \text{Stab}_{\mathfrak{G}}(n) \twoheadrightarrow \mathfrak{G}$ donnée par la projection sur le facteur indicé par σ .

Les premiers trois points du théorème ont été prouvés par Alexander Rozhkov dans [Roz96b]. Les autres ont été obtenus par la méthode de la \acute{n} congruence quantitative \acute{z} décrite à la section 4.2.

6.2. L -présentations

Igor Lysënok a découvert une présentation remarquable de \mathfrak{G} par générateurs et relations [Lys85]. Avant de la donner, on définit les présentations de cette sorte :

DEFINITION 6.2. Une L -présentation d'un groupe G est la donnée d'ensembles S et R , et d'une famille Φ d'applications $\phi : S \rightarrow S^*$. On la note

$$G = \langle S | R | \Phi \rangle.$$

Elle est *finie* si S , R et Φ sont finis.

Chaque $\phi \in \Phi$ induit un homomorphisme de monoïdes $S^* \rightarrow S^*$ par concaténation. Le groupe associé à une L -présentation est

$$G = \langle S | \phi_1 \dots \phi_n(r) \text{ pour tous les } \phi_i \in \Phi \text{ et } r \in R \rangle.$$

Clairement, les groupes de L -présentation finie contiennent les groupes de présentation finie. De plus, tous les $\phi \in \Phi$ induisent des endomorphismes de G . Le vocabulaire est autant un hommage à Igor Lysënok qu'une référence aux *systèmes L* (voir [RS80]) utilisés pour modéliser des phénomènes de croissance biologique.

Soit $S = \{a, b, c, d\}$ engendrant \mathfrak{G} , et soit σ la substitution sur S^* définie par

$$\sigma(a) = aca, \quad \sigma(b) = d, \quad \sigma(c) = b, \quad \sigma(d) = c.$$

Il est remarquable que cette substitution apparaisse dans des situations fort diverses : le résultat qui suit, la structure des espaces homogènes \mathfrak{G}/P (voir la section 6.3), des algèbres de Lie associées à \mathfrak{G} (voir la section 6.4), etc. On peut déjà dire que si σ induit un endomorphisme de \mathfrak{G} (ce qui est montré par le théorème ci-dessous), alors on a

$$\psi(\sigma(g)) = (g', g)$$

pour un $g' \in \langle a, d \rangle \cong D_8$.

THEOREM 6.3 ([Lys85]). \mathfrak{G} admet la L -présentation finie suivante :

$$\mathfrak{G} = \langle a, c, d | a^2, (ad)^4, (adacac)^4 | \sigma \rangle.$$

Rostislav Grigorchuk a par ailleurs montré dans [Gri99] que l'ensemble des relateurs obtenus à partir de a^2 , $(ad)^4$ et $(adacac)^4$ est minimal, c'est-à-dire que si l'on supprime l'un seul de ces relateurs on obtient un groupe différent. Il obtient ainsi la 2-cohomologie de \mathfrak{G} .

Rostislav Grigorchuk et l'auteur déterminent une L -présentation pour le groupe $\tilde{\mathfrak{G}}$ dans [BG99a] :

THEOREM 6.4. $\tilde{\mathfrak{G}}$ admet la L -présentation finie suivante :

$$\tilde{\mathfrak{G}} = \left\langle a, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{d} \mid a^2, [\tilde{b}, \tilde{c}], (a\tilde{c})^4, (a\tilde{d})^4, \right. \\ \left. (a\tilde{c}a\tilde{d})^2, (a\tilde{b}a\tilde{b}a\tilde{c})^4, (a\tilde{b}a\tilde{b}a\tilde{d})^4, (a\tilde{b}a\tilde{b}a\tilde{c}a\tilde{b}a\tilde{b}a\tilde{d})^2 \mid \tilde{\sigma} \right\rangle,$$

où $\tilde{\sigma}$ est la substitution sur $\{a, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{d}\}^*$ définie par

$$a \mapsto a\tilde{b}a, \quad \tilde{b} \mapsto \tilde{d}, \quad \tilde{c} \mapsto \tilde{b}, \quad \tilde{d} \mapsto \tilde{c}.$$

On ne sait pas si les groupes $\Gamma, \bar{\Gamma}, \overline{\bar{\Gamma}}$ possèdent une L -présentation finie ; Saïd Sidki l'affirme pour $\bar{\Gamma}$ dans [Sid87b], sans pour autant donner de forme explicite pour R et Φ .

Un des intérêts des L -présentations est la version suivante, explicite, du théorème de Higman :

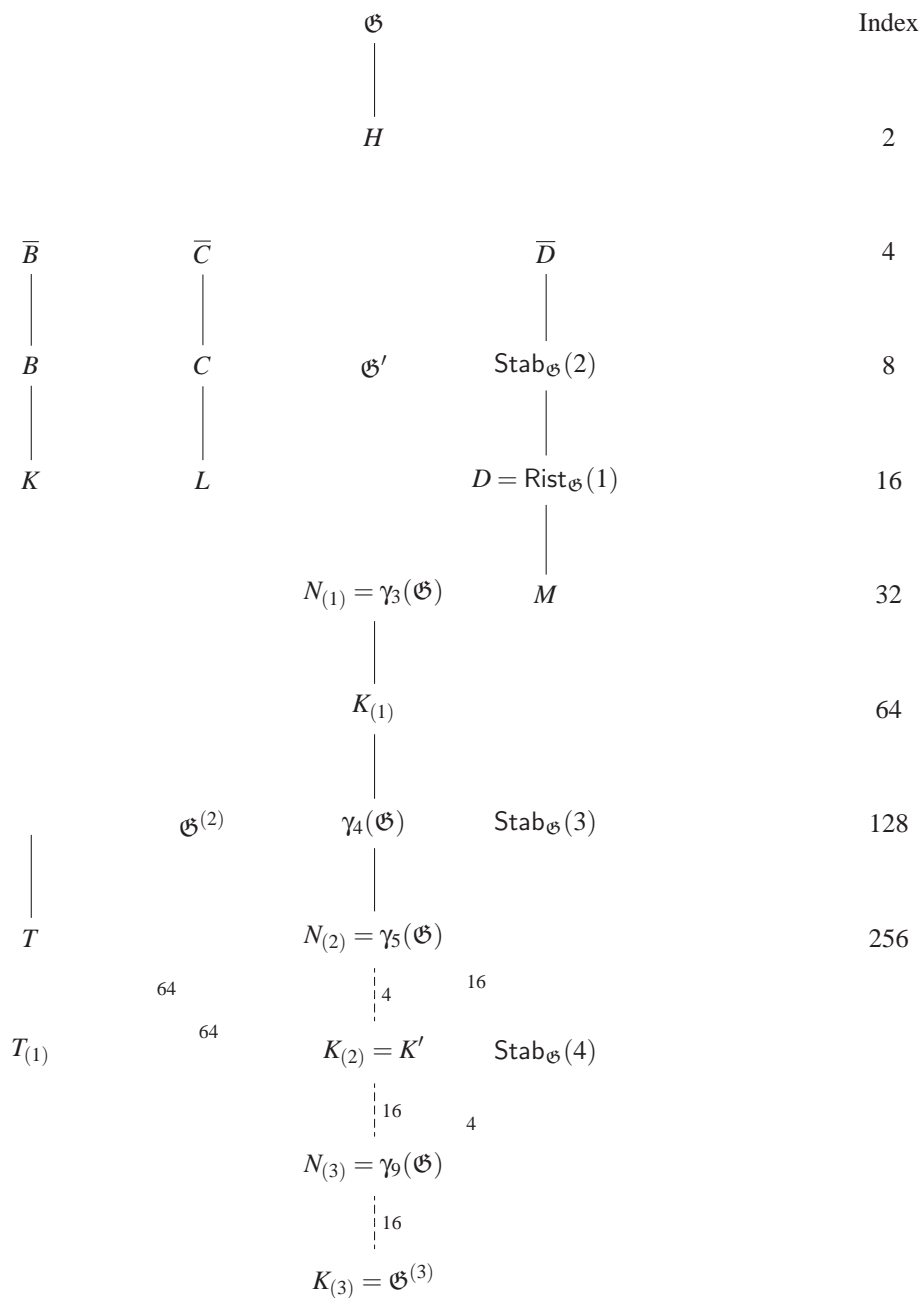


FIG. 6.1. Le sommet du treillis des sous-groupes normaux de \mathfrak{G} au-dessous de H . Les nombres à côté des arêtes en trait tillé indiquent l'indice du sous-groupe.

THEOREM 6.5. *Soit G un groupe de L -présentation finie. Alors il existe un groupe \widehat{G} de présentation finie contenant G . De plus, \widehat{G} est obtenu de G par un nombre fini d'extensions HNN.*

DÉMONSTRATION. Soit $\langle S|R|\Phi \rangle$ une L -présentation finie de G . On prend un alphabet X_Φ en bijection avec Φ , et on pose

$$\widehat{G} = \langle S \cup X_\Phi | R \cup \{x_\phi s = \phi(s)x_\phi\}_{s \in S, x_\phi \in X_\Phi} \rangle.$$

□

Claas Röver a inclu le groupe de Grigorchuk \mathfrak{G} dans des groupes de présentation finie par à l'aide de techniques radicalement différentes [Röv99a].

6.3. L'espace homogène \mathfrak{G}/P

On a défini au chapitre 4 les sous-groupes paraboliques. On peut donner une description explicite de l'espace homogène \mathfrak{G}/P comme suit, en remarquant qu'il s'agit d'un graphe de Schreier.

Soit $S = \{a, b, c, d\}$ engendrant \mathfrak{G} , soit $P = \text{Stab}_{\mathfrak{G}}(1^\infty)$ le sous-groupe parabolique de \mathfrak{G} associé au rayon le plus à droite de \mathcal{T} , et soit $P_n = \text{Stab}_{\mathfrak{G}}(1^n)$. Clairement, P_n est d'indice 2^n dans \mathfrak{G} et donc $\mathcal{S}(\mathfrak{G}, P_n, S)$ a 2^n sommets. De plus, du fait que \mathfrak{G} a la propriété de congruence, $\mathcal{S}(\mathfrak{G}, P, S)$ est approximé par les $\mathcal{S}(\mathfrak{G}, P_n, S)$ dans le sens que toute boucle dans $\mathcal{S}(\mathfrak{G}, P, S)$ se trouve isomorphiquement dans $\mathcal{S}(\mathfrak{G}, P_n, S)$ pour n assez grand.

Pour décrire les arêtes de $\mathcal{S}(\mathfrak{G}, P_n, S)$, on étend l'alphabet S en un alphabet légèrement plus grand $\bar{S} = \{a, b, c, d, \{c\}, \{b\}, \{d\}\}$. On définit un homomorphisme $\bar{\sigma}$ de \bar{S}^* par

$$(10) \quad \sigma : \begin{cases} \bar{S}^* \rightarrow \bar{S}^*, \\ a \mapsto a\{c\}a, \\ b \mapsto d, c \mapsto b, d \mapsto c, \end{cases}$$

étendu naturellement aux sous-ensembles. La raison de cette extension de S à \bar{S} est qu'en plus de l'endomorphisme σ décrit à la section 6.2, il existe un endomorphisme σ' de \mathfrak{G} donné par

$$\sigma'(a) = aba, \quad \sigma'(b) = d, \sigma'(c) = b, \sigma'(d) = c.$$

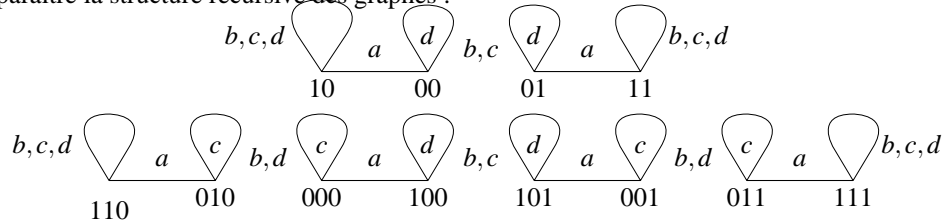
L'opération $\bar{\sigma}$ combine en quelque sorte σ et σ' .

On peut alors vérifier [Lys85, Bar00d] que si $w \in S^*$ représente un élément g de \mathfrak{G} , alors $\bar{\sigma}(w)$ représente un ensemble d'éléments h de $H = \text{Stab}_{\mathfrak{G}}(1)$ en choisissant dans les lettres-ensemble un élément quelconque, et $\psi(h) = (*, g)$ pour un certain $* \in \mathfrak{G}$.

Soit w le mot $\bar{\sigma}^n(a)$, de longueur $2^n - 1$. On considère à présent le graphe \mathfrak{G}_n suivant : il a 2^n sommets $\{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$ alignés sur une droite. L'arête entre $i - 1$ et i est étiquetée par w_i (si w_i est un ensemble, il y a 2 arêtes entre $i - 1$ et i). On ajoute finalement des boucles en tous les i étiquetées par toutes les lettres de S n'apparaissant pas encore sur une arête en i .

THEOREM 6.6 ([BG99b]). $\mathfrak{G}_n \cong \mathcal{S}(\mathfrak{G}, P, S)$.

À titre d'illustration, voici \mathfrak{G}_2 et \mathfrak{G}_3 . On a numéroté les sommets en base 2 pour mieux faire apparaître la structure récursive des graphes :



6.4. Algèbres de Lie

Commençons par quelques généralités sur les suites centrales et les algèbres qu'on peut leur associer. La construction ci-dessous est due à Wilhelm Magnus [Mag40] ; elle est par exemple décrite dans [HB82, chapitre VIII].

DEFINITION 6.7. Soit G un groupe. Une suite $\Sigma = \{G_n\}_{n=1}^\infty$ de sous-groupes de G est une N -suite si $G_1 = G$, $G_{n+1} \leq G_n$ et $[G_m, G_n] \leq G_{m+n}$ pour tous les $m, n \geq 1$.

Soit p un nombre premier. Σ est une p -suite si de plus $G_n^p \leq G_{pn}$ pour tout n , où G_n^p est le sous-groupe de G_n engendré par ses puissances p -ièmes.

Soit Σ une N -suite. On lui associe l'anneau de Lie gradué

$$(11) \quad \mathcal{L}^\Sigma(G) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} L_n,$$

où $L_n = G_n/G_{n+1}$ est un groupe abélien, et l'opération de crochet dans $\mathcal{L}^\Sigma(G)$ est induite par la commutation dans G . Si de plus Σ est une p -suite, on obtient ainsi une p -algèbre de Lie (ou algèbre restreinte ; voir [Jac41] ou [Jac62, chapitre V]) sur \mathbb{F}_p , dont l'opération de Frobénius $L_n \rightarrow L_{pn}$ est induite par la mise à la puissance p .

Comme exemple de N -suite, on peut prendre la suite centrale descendante $\{\gamma_n(G)\}_{n=1}^\infty$, donnée par $\gamma_1(G) = G$ et $\gamma_{n+1}(G) = [\gamma_n(G), G]$. La suite p -centrale descendante, définie par $P_1(G) = G$ et $P_{n+1}(G) = P_n(G)^p [P_n(G), G]$ donne, elle, une p -suite. De façon générale, si \mathbb{k} est un corps, on a les sous-groupes \mathbb{k} -dimensionnels $\{G_n\}_{n=1}^\infty$ définis par

$$G_n = \{g \in G \mid g - 1 \in \Delta^n\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

où Δ est l'idéal d'augmentation (aussi dit l'idéal fondamental) de l'algèbre de groupe $\mathbb{k}[G]$. Un résultat de Stephen Jennings [Jen41] est que si \mathbb{k} est de caractéristique p alors $G_n = P_n(G)$.

Si $\mathcal{L}^\Sigma(G)$ est un anneau de Lie construit comme en (11) et \mathbb{k} est un corps, on peut obtenir une algèbre de Lie $\mathcal{L}_{\mathbb{k}}^\Sigma(G)$ sur \mathbb{k} par

$$\mathcal{L}_{\mathbb{k}}^\Sigma(G) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} L_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{k}.$$

si Σ est la suite \mathbb{k} -dimensionnelle, on écrit simplement $\mathcal{L}_{\mathbb{k}}(G)$ pour l'algèbre de Lie correspondante.

De nombreuses propriétés d'un groupe transparaissent dans son algèbre de Lie. Par exemple, un des résultats les plus importants obtenus par la méthode décrite ci-dessus est le théorème d'Efim Zel'manov [Zel95a] affirmant que si l'algèbre de Lie $\mathcal{L}_{\mathbb{F}_p}(G)$ associée aux sous-groupes \mathbb{F}_p -dimensionnels d'un groupe de type fini G résiduellement p et de torsion satisfait une identité polynômiale, alors G est un groupe fini. Il a obtenu ainsi une réponse positive au problème de Burnside restreint [VZ93, Zel95b, VZ96, Zel97], qui demande si un groupe de type fini satisfaisant pour un n fixé une équation $X^n = 1$ peut être infini.

Comme autre exemple, mentionnons le critère d'analyticité pour les pro- p -groupes, dû à Michel Lazard [Laz65]. Il dit qu'un pro- p -groupe est p -adique-analytique (c'est-à-dire qu'il admet une structure de variété analytique sur \mathbb{Q}_p pour laquelle la multiplication est une application analytique) si et seulement si $G_n = G_{n+1}$ pour un n suffisamment grand, où les G_n sont les sous-groupes \mathbb{F}_p -dimensionnels de G .

La méthode des algèbres de Lie s'applique aussi à la théorie de la croissance des groupes, comme Rostislav Grigorchuk l'a constaté dans [Gri89]. Il a prouvé là que dans la classe des groupes résiduellement p il y a un \acute{n} trou \acute{z} entre croissance de type polynômial et croissance de type $e^{\sqrt{n}}$. Ce résultat a ensuite été généralisé dans [LM91, Theorem D] à la classe des groupes résiduellement nilpotents.

Par ailleurs, Rostislav Grigorchuk et Tullio Ceccherini-Silberstein ont utilisé dans [CG97] la méthode des algèbres de Lie pour montrer que de nombreux groupes à un relateur ont croissance uniformément exponentielle, au sens suivant :

DEFINITION 6.8. Soit $\omega_G^S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\gamma_G^S(n)}$ le taux de croissance exponentielle de G relativement au système de générateurs S , et soit $\omega_G = \inf_S \omega_G^S$, où l'infimum est pris sur tous les systèmes de générateurs finis.

Le groupe G a croissance uniformément exponentielle si $\omega_G > 1$.

Un lemme classique [Gri89] établit le rapport entre la croissance de G et celle de son algèbre de Lie :

PROPOSITION 6.9. *Soit G un groupe engendré par l'ensemble fini S , soit Δ l'idéal d'augmentation de l'algèbre de groupe $\mathbb{F}_p G$, et soit $A = \bigoplus_{n \geq 0} \Delta^n / \Delta^{n+1}$ l'algèbre graduée associée. Alors le taux de croissance ω_G^S de G est au moins égal au taux de croissance de A .*

De plus, A est la p -algèbre enveloppante de $L(G)$, et donc A et $L(G)$ ont le même taux de croissance, par l'isomorphisme de Poincaré-Birkhoff-Witt.

Finalement, il y a une tentative de classification de groupes juste-infinis. Rappelons qu'un groupe est *juste-infini* s'il est infini, mais que tous ses quotients propres sont finis. Un groupe G est de *largeur finie* s'il existe une borne $K \in \mathbb{N}$ telle que toutes les inclusions $\gamma_{n+1}(G) < \gamma_n(G)$ soient d'indice au plus K . L'énoncé ci-dessous a été discuté par de nombreux mathématiciens et a été avancé par Efim Zel'manov à Castelvechio en 1996 [Zel96] :

CONJECTURE 6.10. *Soit G un pro- p -groupe juste-infini de largeur finie. Alors G est soit résoluble, soit p -adique-analytique, soit commensurable à la partie positive d'un groupe de boucles ou au groupe de Nottingham.*

Les calculs de Rostislav Grigorchuk et l'auteur dans [BG00] infirment cette conjecture en produisant un contre-exemple, qui est précisément la complétion profinie du groupe de Grigorchuk \mathfrak{G} . Ils obtiennent la structure explicite de $\mathcal{L}_{\mathbb{F}_2}^{\Sigma}(\mathfrak{G})$, pour Σ la suite centrale descendante et la suite 2-centrale descendante.

Le groupe \mathfrak{G} agit sur l'arbre \mathcal{T}_2 , donc pour tout $m \in \mathbb{N}$ sur $\{0, 1\}^m$, qui représente les sommets à distance m de la racine. Soit V_m l'espace vectoriel sur \mathbb{F}_2 engendré par $\mathfrak{G}/\text{Stab}_G(0^m)$, de dimension 2^m . Il a une structure de \mathfrak{G} -module naturelle. On définit la suite V_m^i de sous-modules de V_m par $V_m^0 = V_m$ et

$$V_m^{r+1} = [\mathfrak{G}, V_m^r] = \langle g \cdot v - v \mid g \in \mathfrak{G}, v \in V_m^r \rangle.$$

LEMMA 6.11. *Pour tout $r \in \{0, \dots, 2^m - 1\}$, on a $\dim V_m^r = 2^m - r$.*

On a défini à la section 6.1 les sous-groupes K_m , T_m et N_m . On a les résultats suivants :

LEMMA 6.12. *L'application*

$$\alpha \oplus \beta : N_m / N_{m+1} \longrightarrow V_m \oplus V_{m-1}$$

est un isomorphisme de \mathfrak{G} -modules pour tout m , où α envoie $(1, \dots, 1, x, 1, \dots, 1) \in K_m$ sur le vecteur de base de V_m correspondant à la position du x , et β envoie $(1, \dots, 1, x^2, 1, \dots, 1) \in T_{m-1}$ sur le vecteur de base correspondant dans V_{m-1} .

Le résultat suivant avait été en partie obtenu par Alexander Rozhkov dans [Roz96a].

THEOREM 6.13. *Pour tout $m \geq 1$ on a :*

- (1) $\gamma_{2^{m+1}}(\mathfrak{G}) = N_m$.
- (2) $\gamma_{2^{m+1+r}}(\mathfrak{G}) = N_{m+1} \alpha^{-1}(V_m^r) \beta^{-1}(V_{m-1}^r)$ for $r = 0, \dots, 2^m$.
- (3)

$$\dim_{\mathbb{F}_2}(\gamma_n(\mathfrak{G})/\gamma_{n+1}(\mathfrak{G})) = \begin{cases} 3 & \text{si } n = 1, \\ 2 & \text{si } n = 2, \\ 2 & \text{si } n = 2^m + 1 + r, \text{ avec } m > 0 \text{ et } 0 \leq r < 2^{m-1}, \\ 1 & \text{si } n = 2^m + 1 + r, \text{ avec } m > 0 \text{ et } 2^{m-1} \leq r \leq 2^m. \end{cases}$$

THEOREM 6.14. *Pour tout $m \geq 1$ on a :*

- (1) $\mathfrak{G}_{2^{m+1}} = N_m$.
- (2)

$$\mathfrak{G}_{2^{m+1+r}} = \begin{cases} N_{m+1} \alpha^{-1}(V_m^r) \beta^{-1}(V_{m-1}^{r/2}) & \text{si } 0 \leq r \leq 2^m \text{ est pair,} \\ N_{m+1} \alpha^{-1}(V_m^r) \beta^{-1}(V_{m-1}^{(r-1)/2}) & \text{si } 0 \leq r \leq 2^m \text{ est impair.} \end{cases}$$

(3)

$$\dim_{\mathbb{F}_2}(\mathfrak{G}_i/\mathfrak{G}_{i+1}) = \begin{cases} 3 & \text{si } i = 1, \\ 2 & \text{si } i > 1 \text{ est pair,} \\ 1 & \text{si } i > 1 \text{ est impair.} \end{cases}$$

Les auteurs introduisent également dans [BG00] la notion de *graphe de Cayley* d'une algèbre de Lie graduée.

DEFINITION 6.15. Soit $L = \bigoplus_{n=1}^{\infty} L_n$ une algèbre de Lie graduée engendrée par un ensemble fini S d'éléments de degré 1. Soit $(\ell_{n,1}, \dots, \ell_{n, \dim L_n})$ une base de L_n pour tout n , et soit $\langle \cdot | \cdot \rangle$ le produit scalaire orthonormal sur L associé à cette base. Le *graphe de Cayley* de L est un graphe étiqueté et pondéré défini ainsi : ses sommets sont les points $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ avec $i \geq 1$ et $1 \leq j \leq \dim L_n$. Pour tout $s \in S$ et $i, j, k \in \mathbb{N}$ on met une arête de (i, j) à $(i+1, k)$ étiquetée par s et de poids $\langle [\ell_{i,j}, s] | \ell_{i+1,k} \rangle$. Par convention on ne représente pas les arêtes de poids 0. Si de plus L est une p -algèbre, on met pour tout $i, j, k \in \mathbb{N}$ une arête de (i, j) à (pi, k) étiquetée \cdot^p et de poids $\langle \ell_{i,j}^p | \ell_{pi,k} \rangle$, où \cdot^p est l'opération de Frobenius.

Le graphe de Cayley est une manière géométrique de représenter les constantes de structure de L , et l'algèbre est donc déterminée par son graphe. Ce graphe est connexe, parce que S est un système générateur. La croissance géométrique de graphe de Cayley coïncide avec la série de Hilbert-Poincaré de l'algèbre.

Comme exemple simple, considérons le groupe des quaternions entiers $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$, engendré par $\{i, j\}$, et sa suite dimensionnelle $Q_1 = Q$, $Q_2 = \{\pm 1\}$ et $Q_3 = 1$ sur le corps \mathbb{F}_2 . Alors le graphe de Cayley de $\mathcal{L}(Q)$ est

$$\begin{array}{ccc} i & & j \\ & & -1 \\ & & j \\ & & i \end{array}$$

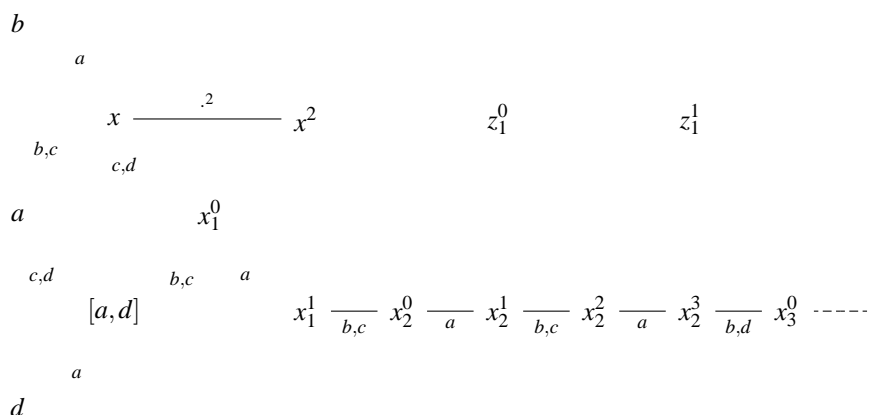
On va maintenant décrire les graphes de Cayley de L et $\mathcal{L}_{\mathbb{F}_2}$ associés respectivement à la suite centrale descendante et à la suite dimensionnelle de \mathfrak{G} . Soit $S = \{a, b, c, d\}$ le système générateur de \mathfrak{G} , et soit \bar{S} le système de générateurs défini en (10).

THEOREM 6.16. *Le graphe de Cayley de $L(\mathfrak{G})$ est comme suit :*

$$\begin{array}{ccccccc} & b & & x^2 & & & \\ & a & a,b,c & & & & \\ & & x & & z_1^0 \xrightarrow{a} z_1^1 & & z_2^0 \text{ -----} \\ b,c & & c,d & & c,d & & b,c \\ & a & & x_1^0 \xrightarrow{a} x_1^1 & & x_2^2 \xrightarrow{a} x_2^3 & \\ & c,d & b,c & b,c & b,c & b,d & \\ & & [a,d] & & x_2^0 \xrightarrow{a} x_2^1 & & x_3^0 \text{ -----} \\ & a & & & & & \\ & d & & & & & \end{array}$$

où $x_m^r = \alpha^{-1}(v_m^r)$ et $z_m^r = \beta^{-1}(v_m^r)$. L'arête $(x_m^{2^m-1}, x_{m+1}^0)$ est étiquetée $\sigma^m\{c\}$, l'arête $(x_m^{2^m-1}, z_m^0)$ est étiquetée $\sigma^m\{b\}$, et les chemins de x_m^0 à $x_m^{2^m-1}$ et de z_m^0 à $z_m^{2^m-1}$ sont étiquetés par $\sigma^{m-1}(a)$.

Le graphe de Cayley de $L_{\mathbb{F}_2}(\mathfrak{G})$ est comme suit :



avec les mêmes règles pour les étiquettes que pour $L(\mathfrak{G})$; et des flèches étiquetées \cdot^2 de x_m^r à z_m^r .

Remarquons que puisque le corps sous-jacent est \mathbb{F}_2 tous les poids non-nuls sont égaux à 1 et n'ont donc pas besoin d'être indiqués.

6.5. Croissance

Les résultats principaux sur la croissance de \mathfrak{G} ont été obtenus par Rostislav Grigorchuk lui-même : il montre dans [Gri83] que \mathfrak{G} a croissance superpolynômiale et sous-exponentielle, puis dans [Gri84] il obtient

$$e^{\sqrt{n}} \lesssim \gamma(n) \lesssim e^{n^\beta},$$

où $\beta = \log_{32}(31) \approx 0.991$. Cette borne inférieure de $e^{\sqrt{n}}$ est d'ailleurs valable pour tous les groupes non-virtuellement nilpotents (qui, eux, sont de croissance polynômiale — voir [Wol68, Gro81a]) qui sont résiduellement p ; voir à la page 48.

Deux de mes articles améliorent chacune de ces bornes. Je montre dans [Bar98] le résultat suivant :

THEOREM 6.17.

$$\gamma(n) \lesssim e^{n^\alpha},$$

où $\eta \approx 0.811$ est la racine réelle du polynôme $X^3 + X^2 + X - 2$, et $\alpha = \log(2)/\log(2/\eta) \approx 0.767$.

La démonstration repose sur le résultat suivant :

LEMMA 6.18. Soit $S = \{a, b, c, d\}$, et soit $\omega : S \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ le poids défini par

$$\omega(a) = 1 - \eta^3 = \eta^2 + \eta - 1, \quad \omega(c) = 1 - \eta^2,$$

$$\omega(b) = \eta^3 = 2 - \eta - \eta^2, \quad \omega(d) = 1 - \eta.$$

Soit $g \in H$, avec $\psi(g) = (g_0, g_1)$. On a alors

$$\eta(|g|_\omega + |a|_\omega) \geq |g_0|_\omega + |g_1|_\omega.$$

On achève la preuve en montrant que le S -portrait d'un élément $g \in \mathfrak{G}$ contient au plus $|g|_\omega^\alpha$ feuilles, et qu'il n'y a qu'un nombre exponentiel en n de S -portraits à n feuilles.

Ce résultat a été ensuite généralisé à une plus grande famille de groupes par Roman Muchnik et Igor Pak [MP99], puis à d'une façon un peu différente par Zoran Šuník et l'auteur dans [BŠ00] (voir le chapitre 7).

Une borne inférieure à la fonction de croissance a été obtenue dans [Bar00d] : le résultat exact est

THEOREM 6.19.

$$\gamma(n) \lesssim e^{n^\alpha},$$

où $\alpha = 0.5157$.

Ce résultat a été obtenu avec l'assistance d'un ordinateur, mais repose sur des considérations purement mathématiques. Le lemme clé est le suivant :

LEMMA 6.20. *Il existe un poids ω sur le système de générateurs $S = \{a, b, c, d\}$ de \mathfrak{G} , et des constantes $K \geq 0$ et $\eta \lesssim 4$, tels que pour tout $h \in H$, si on écrit $\psi(h) = (h_0, h_1)$, on a*

$$(12) \quad [|h|_\omega \leq \eta \max\{|h_0|_\omega, |h_1|_\omega\} + K.$$

Il suit aisément de ce lemme que la croissance de \mathfrak{G} est au moins e^{n^α} , où $\alpha = \log 2 / \log \eta \gtrsim 0.5$.

La démonstration du lemme 6.20 consiste en la construction d'un algorithme, exprimé sous la forme d'un transducteur à états finis (apparenté à ceux de la section 1.4) produisant un mot sur S représentant h à partir de mots représentant h_0 et h_1 .

Un tel transducteur est malheureusement assez complexe, et un programme informatique a donc été écrit pour le produire. Quelques minutes de calcul ont abouti à un transducteur convenable, possédant 160 états.

Un deuxième programme a ensuite déterminé le poids idéal ω , de façon à minimiser la constante η de l'équation 12. On a obtenu ainsi le poids

$$\omega(a) = 1, \quad \omega(b) = 3.33, \quad \omega(c) = 2.8, \quad \omega(d) = 1.06$$

donnant la constante $\eta \approx 3.84$.

Un résultat légèrement plus faible avait été annoncé par Yuriï Leonov [Leo98a] : il a obtenu

$$\gamma(n) \gtrsim e^{n^{0.5041}}$$

par des méthodes assez similaires (mais sans avoir recours à un ordinateur).

Groupes à colonne vertébrale

Se décris dans ce chapitre un article réalisé en commun avec Zoran Šuník. On a vu plus haut la notion d'automorphismes dirigés à la définition 1.18. On considère ici les groupes suivants :

DEFINITION 7.1. Un groupe à colonne vertébrale agissant sur l'arbre \mathcal{T}_Σ est donné par un sous-groupe fini A de \mathfrak{S}_Σ agissant transitivement sur le premier niveau Σ de Σ^* , d'un groupe fini B , et d'une suite infinie $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots)$ d'épimorphismes $\omega_i : B \rightarrow A$. On appelle A le groupe de racine et B le groupe de niveau.

L'action de $b \in B$ est définie comme suit : on distingue deux lettres de Σ , par exemple 1 et d . On décrète :

$$b(\tau) = \begin{cases} d \dots d 1 \omega_n(b)(\sigma) & \text{si } \tau \text{ s'écrit } d \dots d 1 \sigma \text{ avec } n \text{ zéros} \\ \tau & \text{sinon.} \end{cases}$$

Un groupe à colonne vertébrale est *régulier* si A agit régulièrement sur Σ , c'est-à-dire si aucun élément non-trivial de A n'a de point fixe.

Les groupes à colonne vertébrale sont une généralisation des constructions de Rostislav Grigorchuk [Gri84] ; ils constituent un revanche un cas particulier des groupes étudiés par Alexander Rozhkov dans [Roz86].

Il sort clairement de cette définition que les groupes à colonne vertébrale sont engendrés par des automorphismes finis et dirigés. Par ailleurs, si on prend $A = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $B = A \times A$ avec les trois automorphismes u, v, w et la suite $\omega = (u, v, w, u, v, w, \dots)$, on obtient le groupe \mathfrak{G} de la section 2.1.

Considérons une suite ω comme ci-dessus. On note $K_i < B$ le noyau de ω_i , et on note σ le décalage sur les suites :

$$\sigma(\omega_1 \omega_2 \dots) = \omega_2 \dots$$

On dit qu'une suite ω est *complète* si pour tout $b \in B$ on a $\omega_i(b) = 1$ pour un $i \in \mathbb{N}$. On impose maintenant sur ω les conditions suivantes :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la réunion des K_i ($i \geq n$) est égale à B ;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intersection des K_i ($i \geq n$) est triviale ;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $\sigma^n(\omega)$ est complète.

On note $\widehat{\Omega}$ l'ensemble des telles suites. Il est clair que $\widehat{\Omega}$ est invariant par σ .

Les résultats principaux qu'on obtient concernent la croissance des mots et la croissance des périodes. Rappelons cette dernière notion :

DEFINITION 7.2. Soit G un groupe engendré par un ensemble fini S , avec un poids $\omega : S \rightarrow \mathbb{R}_+^*$. Sa fonction de croissance des périodes est $\pi_\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par

$$\pi_\omega(n) = \max\{\text{ordre}(g) \mid |g|_\omega \leq n\}.$$

On peut mettre sur les fonctions de croissance des périodes la même notion d'équivalence que sur les fonctions de croissance des mots (définie en 3.1). On obtient ainsi un objet intrinsèque à G , c'est-à-dire indépendant de S et ω .

Le théorème suivant étend à une plus grande classe les résultats de [Gri85] :

THEOREM 7.3 ([BŠ00]). Soit G_ω un groupe à colonne vertébrale. Alors G_ω a une croissance intermédiaire et est de torsion.

Sa croissance $\gamma(n)$ est au moins e^{n^α} , avec $\alpha = \frac{\log(d)}{\log(d) - \log \frac{1}{2}}$. Si de plus G_ω est régulier, alors sa croissance des périodes $\pi(n)$ est au moins \sqrt{n} .

On obtient des résultats plus précis si on suppose qu'il y a de plus une certaine homogénéité dans le mot ω , au sens suivant :

DEFINITION 7.4. La suite ω est *r-homogène* si pour tout $b \in B$ toute sous-suite de longueur r de ω contient un ω_i avec $b \in K_i$.

La suite ω est *r-factorisable* si elle peut s'exprimer comme un produit de suites $\omega' \omega'' \dots$, chacune de longueur au plus r et complète.

Clairement, toute suite *r-homogène* est *r-factorisable*, et toute suite *r-factorisable* est $2r - 1$ -homogène.

THEOREM 7.5. Soit ω une suite *r-homogène*. Alors la fonction de croissance γ de G_ω satisfait

$$\gamma(n) \lesssim e^{n^\beta},$$

où $\beta = \frac{\log(d)}{\log(d) - \log(\eta_r)}$ et η_r est la racine positive du polynôme $X^r + X^{r-1} + X^{r-2} - 2$.

Si de plus G_ω est régulier, alors la fonction de croissance des périodes π de G_ω satisfait

$$\pi(n) \lesssim n^{\log_{1/\eta_r}(d)}.$$

On a le résultat suivant pour les suites *r-factorisables*. Il est intéressant de noter que selon la suite ω choisie l'un ou l'autre des théorèmes 7.5 et 7.6 peut donner la meilleure estimation.

THEOREM 7.6. Soit ω une suite *r-factorisable*. Alors la fonction de croissance γ de G_ω satisfait

$$\gamma(n) \lesssim e^{n^\beta},$$

où $\beta = \frac{\log(d)}{\log(d) - \frac{1}{r} \log(4/3)}$.

Si de plus G_ω est régulier, alors la fonction de croissance des périodes π de G_ω satisfait

$$\pi(n) \lesssim n^{r \log_{4/3}(d)}.$$

Il existe en fait une relation générale reliant la croissance des mots et la croissance des périodes, due à Yuriĭ Leonov [Leo99]. Elle est basée sur une étude soignée de la notion de portrait. Dans notre cadre, elle se formule comme suit :

THEOREM 7.7. Soit G_ω un groupe à colonne vertébrale régulier, où ω est une suite *r-factorisable*. Si on a

$$\gamma(n) \lesssim e^{n^\beta},$$

alors on a aussi

$$\pi(n) \lesssim n^{r\beta}.$$

Deuxième partie

Croissance dans des graphes

Croissance des chemins



ans cette partie, je rappelle les résultats obtenus dans [Bar99]. Ils concernent à proprement parler des digraphes quelconques, mais trouvent leur application principale en théorie des groupes, dans la célèbre formule de Grigorchuk (15).

DEFINITION 8.1 (Graphes). Un *graphe* \mathfrak{G} est une paire d'ensembles $\mathfrak{G} = (V, E)$ (les *sommets* et *arêtes* ; notés ainsi à cause de leurs noms anglais : *vertices* et *edges*) munie d'applications

$$\alpha : E \rightarrow V, \quad \omega : E \rightarrow V, \quad \bar{\cdot} : E \rightarrow E$$

satisfaisant

$$\overline{\bar{e}} = e, \quad \alpha(\bar{e}) = \omega(e).$$

Le graphe \mathfrak{G} est dit *fini* si $E(\mathfrak{G})$ et $V(\mathfrak{G})$ sont les deux des ensembles finis.

Un *morphisme de graphes* $\phi : \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{H}$ est une paire d'applications $(V(\phi), E(\phi))$ avec $V(\phi) : V(\mathfrak{G}) \rightarrow V(\mathfrak{H})$ et $E(\phi) : E(\mathfrak{G}) \rightarrow E(\mathfrak{H})$ telles que

$$\overline{E(\phi)e} = E(\phi)\bar{e}, \quad V(\phi)(\alpha e) = \alpha(E(\phi)e).$$

Étant donné une arête $e \in E(\mathfrak{G})$, on appelle $\alpha(e)$ et $\omega(e)$ respectivement la *source* et la *destination* de e . Deux sommets x, y sont *adjacents*, ce qu'on note $x \sim y$, s'ils sont reliés par une arête, c'est-à-dire s'il existe une arête $e \in E(\mathfrak{G})$ telle que $\alpha(e) = x$ et $\omega(e) = y$. Deux arêtes e, f sont *consécutives* si $\omega(e) = \alpha(f)$. Une *boucle* est une arête e avec $\alpha(e) = \omega(e)$.

Le *degré* $\deg(x)$ d'un sommet x est le nombre d'arêtes incidentes :

$$\deg(x) = \#\{e \in E(\mathfrak{G}) \mid \alpha(e) = x\} = \#\{e \in E(\mathfrak{G}) \mid \omega(e) = x\}.$$

Si $\deg(x)$ est fini pour tout sommet x , on dit que \mathfrak{G} est *localement fini*. Si $\deg(x) = d$ pour tout sommet x , on dit que \mathfrak{G} est *d-régulier*.

Notons que l'involution $e \mapsto \bar{e}$ peut avoir des points fixes ; ce seraient des boucles différentes elles-mêmes parcourues en sens inverse, ce qui ne se représente pas aisément. Au cas où $\bar{\cdot}$ n'a pas de point fixe, \mathfrak{G} peut être vu comme un graphe simplicial — il est représenté fidèlement par un dessin dans \mathbb{R}^3 .

Cette notion de graphe est particulièrement bien adaptée à la théorie des groupes. Les graphes rencontrés habituellement en combinatoire sont donnés par un ensemble V et une famille E de sous-ensembles de cardinalité 2 de V . Dans notre contexte, cela revient à interdire les points fixes de $\bar{\cdot}$; à exiger de toute arête e que $\alpha(e)$ et $\omega(e)$ soient distincts ; et, pour toute paire de sommets x, y , à autoriser au plus une arête entre x et y . Aucune de ces restrictions n'est nécessaire pour notre propos.

Bien que chaque arête de \mathfrak{G} soit individuellement orientée, le graphe \mathfrak{G} lui-même doit être considéré comme un graphe non-orienté, vu que chaque arête e possède une image-miroir \bar{e} .

DEFINITION 8.2 (Chemins). Un *chemin* dans \mathfrak{G} est une séquence π ,

$$\pi = (v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_n, v_n)$$

de sommets et d'arêtes de \mathfrak{G} , avec $\alpha(e_i) = v_{i-1}$ et $\omega(e_i) = v_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, avec $n \geq 0$. La *longueur* du chemin π est le nombre n d'arêtes dans π . Le *début* du chemin π est $\alpha(\pi) = v_0$, et sa *fin* est $\omega(\pi) = v_n$. Si $\alpha(\pi) = \omega(\pi)$, le chemin π est appelé un *circuit* en $\alpha(\pi)$. Dans la plupart des cas, on peut omettre les v_n de la description des chemins ; ils ne sont nécessaires que

quand $|\pi| = 0$, auquel cas un point de départ doit être fixé. On étend l'involution $\bar{\cdot}$ des arêtes aux chemins par

$$\bar{\pi} = (v_n, \bar{e}_n, \dots, v_1, \bar{e}_1, v_0)$$

(notons que $\bar{\pi}$ est un chemin de $\omega(\pi)$ à $\alpha(\pi)$).

On note $E^*(\mathfrak{G})$ l'ensemble des chemins, avec une multiplication partiellement définie par la concaténation des suites : si π et ρ sont doux chemins avec $\omega(\pi) = \alpha(\rho)$, leur *produit* est défini par $\pi\rho = (\pi_1, \dots, \pi_{|\pi|}, \rho_1, \dots, \rho_{|\rho|})$. Étant donnés deux sommets $x, y \in V(\mathfrak{G})$, on note $[x, y]$ l'ensemble des chemins de x à y . On fait de $V(\mathfrak{G})$ un espace métrique en définissant pour des sommets $x, y \in V(\mathfrak{G})$ leur *distance*

$$d(x, y) = \min_{\pi \in [x, y]} |\pi|.$$

La multiplication des chemins est une opération $[x, y] \times [y, z] \rightarrow [x, z]$. Cela fait de \mathfrak{G} une catégorie libre, avec pour objets $V(\mathfrak{G})$ et pour morphismes $\text{Hom}(x, y) = [x, y]$.

DEFINITION 8.3 (Bosses). Le chemin π a une *bosse en i* si $\pi_i = \overline{\pi_{i+1}}$; si la position de la bosse n'est pas importante, on dit juste que π a une bosse. Le *nombre de bosses* $\text{nb}(\pi)$ d'un chemin est le nombre d'indices i où π a une bosse. Un chemin est [*chemin propre*]*propre* s'il n'a pas de bosses.

On supposera désormais qu'un graphe localement fini \mathfrak{G} a été fixé, avec deux sommets distingués $\star, \dagger \in V(\mathfrak{G})$. On souhaite énumérer les chemins, en comptant leur nombre de bosses, entre \star et \dagger dans \mathfrak{G} . On définit :

DEFINITION 8.4 (Séries de chemins). La série formelle

$$G(t) = \sum_{\pi \in [\star, \dagger]} t^{|\pi|} \in \mathbb{N}[[t]]$$

est appelée la *série de chemins* de $(\mathfrak{G}, \star, \dagger)$. La série

$$F(u, t) = \sum_{\pi \in [\star, \dagger]} u^{\text{nb}(\pi)} t^{|\pi|} \in \mathbb{N}[u][[t]] \subset \mathbb{N}[[u, t]]$$

est appelée la *série de chemins enrichie* de $(\mathfrak{G}, \star, \dagger)$. Sa spécialisation $F(0, t)$ est appelée la *série de chemins propres* de $(\mathfrak{G}, \star, \dagger)$.

Au cas où $\star = \dagger$, on appelle G la *série de circuits* de (\mathfrak{G}, \star) et F la *série de circuits enrichie* de (\mathfrak{G}, \star) . La série de circuits est souvent appelée la [*fonction(s) de Green*]*fonction de Green* du graphe \mathfrak{G} ; puisqu'on s'intéresse plus ici à des propriétés formelles de G , on l'appellera aussi la *série de Green* de \mathfrak{G} .

Notons que $G(t)$ appartient à $\mathbb{N}[[t]]$ parce que \mathfrak{G} est localement fini, donc il n'y a qu'un nombre fini de chemins de longueur donnée, et ainsi qu'un nombre fini de termes dans la somme qui ont un degré donné.

De même, $F(u, t)$ appartient à $\mathbb{N}[u][[t]]$, parce que si on exprime $F(u, t) = \sum f_n t^n$ avec à priori $f_n \in \mathbb{N}[[u]]$, chaque f_n n'est qu'une somme finie de monômes, donc est un polynôme. Si on pose $G(t) = \sum g_n t^n$, on a même $g_n = f_n(1)$.

Le résultat principal de [Bar99] est, pour des graphes d -réguliers, le

THEOREM 8.5. Soit \mathfrak{G} un graphe d -régulier. On a alors

$$(13) \quad \frac{F(1-u, t)}{1-u^2 t^2} = \frac{G\left(\frac{t}{1+u(d-u)t^2}\right)}{1+u(d-u)t^2}.$$

Applications aux groupes

Nontrons maintenant en quoi F est relié à la cocroissance et G aux marches aléatoires dans des groupes. On généralisera ainsi la formule de Grigorchuk (valable pour des quotients de groupes libres) à des espaces homogènes de groupes libres. Pour un survol de la théorie des marches aléatoires sur des groupes, voir par exemple les références [MW89, Woe94].

Dans ce chapitre on écrira toujours $F(t)$ pour $F(0, t)$. Rappelons la notion de croissance dans les groupes :

DEFINITION 9.1. Soit Γ un groupe engendré par un système fini symétrique S . Pour $\gamma \in \Gamma$, on définit sa *longueur*

$$|\gamma| = \min\{n \in \mathbb{N} : \gamma \in S^n\}.$$

La *série de croissance* de (Γ, S) est la série formelle

$$f_{(\Gamma, S)}(t) = \sum_{\gamma \in \Gamma} t^{|\gamma|} \in \mathbb{N}[[t]].$$

En développant $f_{(\Gamma, S)}(t) = \sum f_n t^n$, la *croissance* de (Γ, S) est

$$\alpha(\Gamma, S) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{f_n}$$

(cette limite supérieure est en fait une limite et est bornée par $|S| - 1$).

Soit R un sous-ensemble de Γ . La *série de croissance* de R par rapport à (Γ, S) est la série formelle

$$f_{(\Gamma, S)}^R(t) = \sum_{\gamma \in R} t^{|\gamma|} \in \mathbb{N}[[t]].$$

En développant $f_{(\Gamma, S)}^R(t) = \sum f_n t^n$, on définit la *croissance* de R par rapport à (Γ, S) comme

$$\alpha(R; \Gamma, S) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{f_n}.$$

Si X est un G -ensemble transitif, la *marche aléatoire simple* sur (X, S) est la marche aléatoire d'un point sur X , ayant probabilité $1/|S|$ de se déplacer de sa position courante x à un voisin $s \cdot x$, pour tout $s \in S$. Fixons un point $\star \in X$, et notons p_n la probabilité qu'une marche aléatoire commençant en \star arrive à \star après n déplacements. On définit le *rayon spectral* de la marche aléatoire comme

$$\nu(X, S) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{p_n}.$$

Ce nombre est indépendant du choix de \star .

La *série de cocroissance* (respectivement la *cocroissance*) de (Γ, S) est définie comme la série de croissance (respectivement la croissance) de $\ker(\pi : \Pi \rightarrow \Gamma)$ par rapport à (\mathbb{F}_S, S) , où \mathbb{F}_S est le groupe libre sur S .

On peut associer à un groupe Π engendré par un ensemble symétrique S et un sous-groupe Ξ un graphe $|S|$ -régulier \mathcal{G} sur lequel Π agit transitivement. On l'appelle le *graphe de Schreier* de (Π, S) par rapport à Ξ . Il est défini comme $\mathcal{G} = (E, V)$, où

$$V = \Pi/\Xi$$

et

$$E = V \times S, \quad \alpha(v, s) = v, \quad \omega(v, s) = sv, \quad \overline{(v, s)} = (sv, s^{-1});$$

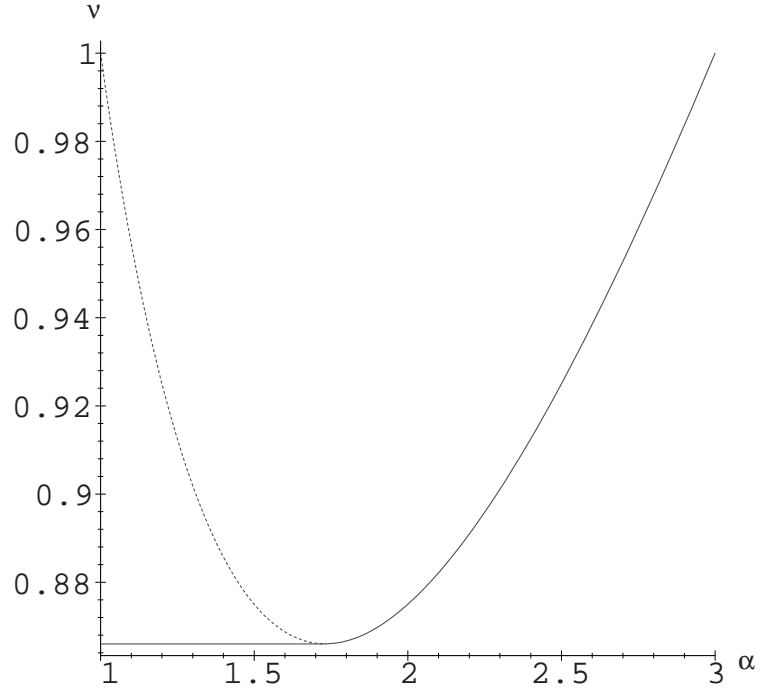


FIG. 9.1. La correspondance $\alpha \mapsto \nu$ reliant la cocroissance et le rayon spectral (si $|S| = 4$)

c'est-à-dire que deux classes à gauche A, B sont reliées par au moins une arête si et seulement si $SA \supset B$. (On retrouve le graphe de Cayley de (Π, S) si $\Xi = 1$). Il y a une boucle en $\nu\Xi$ dans \mathcal{G} chaque fois que $\nu\Xi\nu^{-1} \cap S \neq \emptyset$; et il y a $|\nu\Xi w^{-1} \cap S|$ arêtes entre $\nu\Xi$ et $w\Xi$ dans \mathcal{G} .

En identifiant F à la croissance relative de Ξ et G à la fonction de Green de \mathbb{F}_S/Ξ , on obtient le corollaire suivant :

COROLLARY 9.2. *Soit Ξ un sous-groupe de \mathbb{F}_S . Soit $\nu = \nu(\Xi \backslash \Pi, S)$ le rayon spectral de la marche aléatoire simple sur \mathbb{F}_S/Ξ , et soit $\alpha = \alpha(\Xi; \Pi, S)$ la croissance relative de Ξ dans Π . On a alors*

$$(14) \quad \nu = \begin{cases} \frac{\sqrt{|S|-1}}{|S|} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{|S|-1}} + \frac{\sqrt{|S|-1}}{\alpha} \right) & \text{si } \alpha > \sqrt{|S|-1}, \\ \frac{2\sqrt{|S|-1}}{|S|} & \text{si } \alpha \leq \sqrt{|S|-1}. \end{cases}$$

En se restreignant au cas où Ξ est normal, avec $\mathbb{F}_S/\Xi = \Gamma$, on obtient le résultat suivant :

COROLLARY 9.3 (Grigorchuk [Gri80b]). *Soit Γ un groupe engendré par un ensemble symétrique fini S , soit ν le rayon spectral de la marche aléatoire simple sur Γ , et soit α la cocroissance de (Γ, S) . Alors*

$$(15) \quad \nu = \begin{cases} \frac{\sqrt{|S|-1}}{|S|} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{|S|-1}} + \frac{\sqrt{|S|-1}}{\alpha} \right) & \text{si } \alpha > \sqrt{|S|-1}, \\ \frac{2\sqrt{|S|-1}}{|S|} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Une grande quantité de démonstrations existent pour ce résultat : la preuve originale [Gri80b] due à Rostislav Grigorchuk, une preuve de Cohen [Coh82], une extension par Northshield à des

graphes transitifs [Nor92], une preuve courte due à Szwarz [Szw89] utilisant la théorie des algèbres d'opérateurs, une autre de Woess [Woe94], etc.

On remarque en fait que si $\alpha < \sqrt{|S| - 1}$, alors nécessairement $\alpha = 0$. De façon équivalente, si $\alpha < \sqrt{|S| - 1}$, alors $\Xi = 1$, et le graphe de Cayley \mathcal{G} est un arbre. Il est même connu que si $\alpha \neq 0$ alors $\alpha > \sqrt{|S| - 1}$; voir [Pas93] pour cette petite amélioration.

Dans [Bar99] une formule analogue à (15) est donnée pour des groupes Γ quotients de $PSL_2(\mathbb{Z})$; les séries de Green et de cocroissance sont définies relativement à $PSL_2(\mathbb{Z})$ engendré par les matrices $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, et non au groupe libre \mathbb{F}_S engendré par l'ensemble de générateurs S .

Calculs pour des arbres

Soit \mathcal{G} un arbre d -régulier. On va calculer pour \mathcal{G} les séries F et G introduites au chapitre 8, reproduisant ainsi des calculs faits par Harry Kesten [Kes59].
 D'abord, il est clair que $F(0, t) = 1$. En effet, un arbre n'a par définition pas de circuit, et donc tout chemin fermé non-trivial dans \mathcal{G} contient nécessairement une bosse. Par conséquent, le seul monôme dans $F(u, t)$ de u -degré 0 est le monôme 1.

Fixons une origine \star de \mathcal{G} , et ôtons à \mathcal{G} une arête e incidente à \star . Appelons \mathcal{T} la composante connexe de $\mathcal{G} \setminus \{e\}$ contenant \star . Par exemple, si $d = 2$, on a $\mathcal{G} \cong \mathbb{Z}$ et $\mathcal{T} \cong \mathbb{N}$. Soient respectivement $F(u, t)$ et $T(u, t)$ les séries comptant les circuits dans \mathcal{G} et dans \mathcal{T} . On a alors les équations suivantes :

$$T = 1 + (d-1)t(T-1+u)t \frac{1}{1-(d-2+u)t(T-1+u)t},$$

$$F = 1 + dt(T-1+u)t \frac{1}{1-(d-1+u)t(T-1+u)t}.$$

Expliquons ces formules. Un circuit dans \mathcal{T} est soit le circuit trivial (contribuant 1), soit une suite de circuits dans des graphes isomorphes à \mathcal{T} . Cette suite est faite, d'abord, d'un pas dans une des $d-1$ directions issues de \star , puis d'un n sous-circuit z ne revenant pas à \star en ce point, puis d'un pas pour revenir à \star ; puis d'un nouveau pas dans une des $d-1$ directions issues de \star , etc. Si le sous-circuit est trivial, une bosse apparaît dans le circuit, et si la nouvelle direction de sortie est la même que la précédente, une bosse apparaît aussi.

De même, un circuit dans \mathcal{G} peut s'exprimer à l'aide d'une suite de circuits dans des sous-graphes isomorphes à \mathcal{T} .

Ces équations peuvent aisément être résolues, donnant

$$T(1-u, t) = \frac{2(1-u)}{1-u(d-u)t^2 + \sqrt{(1+u(d-u)t^2)^2 - 4(d-1)t^2}},$$

$$F(1-u, t) = \frac{2(d-1)(1-u^2t^2)}{(d-2)(1+u(d-u)t^2) + d\sqrt{(1+u(d-u)t^2)^2 - 4(d-1)t^2}}.$$

Mais maintenant, on constate qu'en utilisant l'équation (13, page 58) et $F(0, t) = 1$ on obtient

$$G(t) = \frac{1 + (d-1) \left(\frac{1 - \sqrt{1-4(d-1)t^2}}{2(d-1)t} \right)^2}{1 - \left(\frac{1 - \sqrt{1-4(d-1)t^2}}{2(d-1)t} \right)^2},$$

ou, après simplification,

$$G(t) = \frac{2(d-1)}{d-2 + d\sqrt{1-4(d-1)t^2}},$$

qui permet aussi, par une deuxième utilisation de (13), d'obtenir $F(1-u, t)$.

En particulier, si $d = 2$, on a $\mathcal{G} = C_\infty = \mathbb{Z}$, et

$$G(t) = \sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} t^{2n} = \frac{1}{\sqrt{1-4t^2}}.$$

Remarquons que pour tout d l'arbre d -régulier est le graphe de Cayley de $\Gamma = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{*d}$ avec son système de générateurs standard. Si d est pair, \mathfrak{G} est aussi le graphe de Cayley d'un groupe libre de rang $d/2$ engendré par un système libre de générateurs. On peut ainsi calculer le rayon spectral de la marche aléatoire sur un groupe libre engendré librement : il est, pour $\mathbb{F}_{d/2}$, égal à

$$(16) \quad \frac{2\sqrt{d-1}}{d}.$$

On peut même étudier une série génératrice plus riche que F : soit

$$H(u, v, t) = \sum_{\pi: \text{chemin issu de } \star} t^{|\pi|} u^{\text{nb}(\pi)} v^{d(\star, \pi_{|\pi|})} \in \mathbb{N}[u, v][[t]],$$

où $d(-, -)$ désigne la distance dans \mathfrak{G} . On a alors

$$\begin{aligned} H(1, v, t) &= F(1, t) + d(T-1+u)tvF + d(T-1+u)tv(d-1)(T-1+u)tvF + \dots \\ &= \frac{1 + (T-1+u)(1, t)tv}{1 - (d-1)(T-1+u)(1, t)tv} F(1, t); \end{aligned}$$

et du fait que H est une somme de séries comptant les chemins entre deux points fixés, on peut obtenir $H(u, v, t)$ de $H(1, v, t)$ en étendant (13) linéairement à $\mathbb{N}[u, v][[t]]$:

$$\frac{H(1-u, v, t)}{1-u^2t^2} = \frac{H\left(1, v, \frac{t}{1+u(d-u)t^2}\right)}{1+u(d-u)t^2}.$$

On aurait aussi pu commencer par calculer la série de croissance

$$H(0, v, t) = \frac{1+vt}{1-(d-1)vt}$$

de tous les chemins propres dans \mathfrak{G} , puis inverser l'égalité (13) pour obtenir

$$\begin{aligned} H(1, v, t) &= \frac{1 + \left(\frac{1-\sqrt{1-4(d-1)t^2}}{2t}\right)^2}{1-u^2\left(\frac{1-\sqrt{1-4(d-1)t^2}}{2(d-1)t}\right)^2} \cdot H\left(\frac{1-\sqrt{1-4(d-1)t^2}}{2(d-1)t}, 0, v\right), \\ H(u, v, t) &= \frac{1-t^2u^2}{1+u(d-u)t^2} \cdot \frac{(d-1)(4t^2+\square^2)}{4(d-1)^2t^2-u^2\square^2} \cdot \frac{2(d-1)t+v\square}{2t-v\square}, \end{aligned}$$

où $\square = 1 + u(d-u)t^2 - \sqrt{(1+u(d-u)t^2)^2 - 4(d-1)t^2}$.

Souvenons-nous que la série de croissance d'un graphe \mathfrak{G} en un point base \star est la série formelle

$$P(t) = \sum_{v \in V(\mathfrak{G})} t^{d(\star, v)} \in \mathbb{N}[[t]],$$

La série H que nous venons de décrire est assez générale pour contenir les informations suivantes sur \mathfrak{G} :

- $H(u, 0, t) = F(u, t)$;
- $H(0, 1, t) = \frac{1+t}{1-(d-1)t} = P(t)$ est la série de croissance de \mathcal{T} ;
- $H(1, 1, t) = 1/(1-dt)$ est la série de croissance de tous les chemins dans \mathcal{T} .

Séries de produits directs et de produits libres



n donne ici la construction d'un graphe pointé à partir de deux graphes pointés, qui s'apparente ou produit libre dans les groupes ou les catégories. Notre but est d'obtenir des formules exprimant la série de Green du produit en terme des séries de Green des facteurs.

Cette définition est due à Gregory Quenell [**Que94**, Definition 4.8] :

DEFINITION 11.1. Soit (\mathcal{E}, \star) et (\mathcal{F}, \star) deux graphes pointés. Leur *produit libre* $\mathcal{E} * \mathcal{F}$ est le graphe construit comme suit : on commence par prendre une copie de \mathcal{E} et une de \mathcal{F} , et on les identifie en leur point base \star . Maintenant, en tout sommet de \mathcal{E} (excepté \star) on colle une copie de \mathcal{F} à son point base, et en tout sommet de \mathcal{F} (excepté \star) on colle une copie de \mathcal{E} à son point base. On procède de même pour les sommets des nouvelles copies.

Si (E, S) et (F, T) sont deux groupes avec systèmes de générateurs fixés, dont les graphes de Cayley sont \mathcal{E} et \mathcal{F} respectivement, alors $\mathcal{E} * \mathcal{F}$ est le graphe de Cayley de $(E * F, S \sqcup T)$.

L'arbre d -régulier peut aussi être obtenu comme produit libre de d graphes en forme de "I", c'est-à-dire de graphes réguliers de degré 1.

Le résultat obtenu dans [**Bar99**] est :

THEOREM 11.2. Soient $G_{\mathcal{E}}$ et $G_{\mathcal{F}}$ les séries de Green de deux graphes \mathcal{E} et \mathcal{F} . Alors

$$(17) \quad \frac{1}{(tG_{\mathcal{E}*\mathcal{F}})^{-1}} = \frac{1}{(tG_{\mathcal{E}})^{-1}} + \frac{1}{(tG_{\mathcal{F}})^{-1}} - \frac{1}{t},$$

où $F^{-1}(t)$ est l'inverse formel de la série F , c'est-à-dire une série G telle que $G(F(t)) = F(G(t)) = t$.

Une équation équivalente à celle-ci, mais de manière non-triviale, apparaît dans un article de Gregory Quenell [**Que94**], et, dans un langage complètement différent (celui des variables aléatoires non-commutatives), dans un article de Dan Voiculescu [**Voi90**, Theorem 4.5].

COROLLARY 11.3. Si les séries de Green de \mathcal{E} et \mathcal{F} sont les deux algébriques, alors la série de Green de $\mathcal{E} * \mathcal{F}$ est aussi algébrique.

On peut aussi utiliser (17) pour obtenir d'une troisième manière la série de Green d'un arbre régulier (voir le chapitre 10). En effet, de façon générale, le produit libre d'arbres réguliers de degré d et e est un arbre régulier de degré $d + e$. Soit G_d la série de Green de l'arbre régulier de degré d .

On calcule d'abord $G_1 = \frac{1}{1-t^2}$, par l'observation que tous les chemins dans l'arbre 1-régulier sont des aller-retour le long de l'unique arête.

On sait ensuite par (17) que

$$\frac{1}{(tG_d)^{-1}} = d \frac{1}{(tG_1)^{-1}} - \frac{d-1}{t},$$

d'où on sort que

$$(tG_d)^{-1}(u) = \frac{2u}{2-d+d\sqrt{1+4u^2}},$$

et finalement

$$G_d(t) = \frac{2(d-1)}{d-2+d\sqrt{1-4(d-1)t^2}},$$

comme on l'a vu auparavant.

Troisième partie

Croissance des groupes agissant sur des arbres

Groupes GGS

On définit à présent une famille de groupes à automates, qui généralise une construction due à Rostislav Grigorchuk, Narain Gupta et Saïd Sidki. On donnera des résultats nouveaux généralisant à une famille de groupes agissant sur des arbres certaines propriétés algébriques et de croissance.

DEFINITION 12.1. Soit A un sous-groupe du groupe symétrique \mathfrak{S}_Σ agissant transitivement sur l'alphabet Σ de cardinalité d , et soient $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{d-1} \in A$ des permutations de Σ engendrant A .

On définit l'automorphisme automatique t_ε comme suit : pour une suite $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n \in \Sigma^*$, on pose par induction $t_\varepsilon(\emptyset) = \emptyset$ et

$$t_\varepsilon(\sigma) = \begin{cases} \phi_{\sigma_1}(\varepsilon_{\sigma_1})(\sigma) & \text{si } \sigma_1 \neq d, \\ \sigma_1 t_\varepsilon(\sigma_2 \dots \sigma_n) & \text{si } \sigma_1 = d \end{cases}$$

(l'application ϕ_σ a été définie en (3, page 19)).

Le groupe GGS associé à A et ε est le sous-groupe de $\text{Aut } \mathcal{T}$ engendré par A et t_ε . On le note G_ε , rendant A implicite dans la notation. On appelle A le groupe de la racine et ε la suite de récurrence.

Dans les définitions précédentes (voir par exemple [Gri00]), on supposait toujours A cyclique et d premier. On ne met pas ici ces deux conditions ; elles reviennent à exiger que d soit premier et que G soit un sous-groupe du pro- d -Sylow $\text{Aut}_* \mathcal{T}$.

Si on ne suppose pas d'emblée que A agit transitivement et est engendré par les ε_i , on dira que G est un groupe proto-GGS.

On considère donc les groupes engendrés par des automorphismes finis confinés au premier niveau, et un automorphisme dirigé t_ε selon le chemin $dd\dots$, au sens de la définition 1.18. On remarque que t_ε appartient au stabilisateur du premier niveau $\text{Stab}_G(1)$. On montre à la figure 12.1 un automate correspondant au générateur t_ε — voir la définition de son action sur l'arbre \mathcal{T}_Σ à la section 1.4.

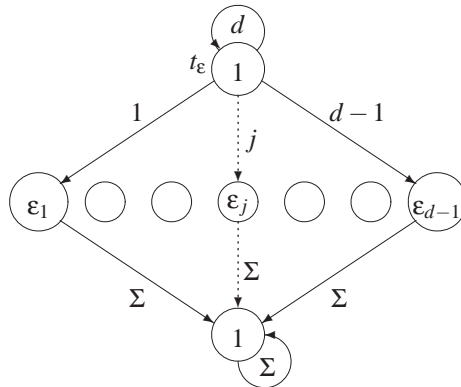
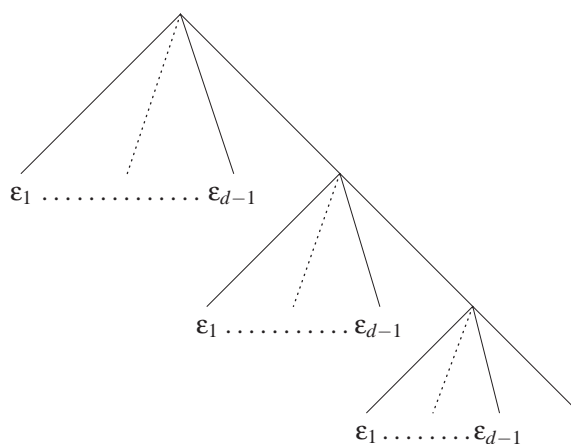


FIG. 12.1. Un automate agissant comme t_ε

FIG. 12.2. L'étiquetage du portrait de t_ε relativement à A

Quant au portrait de t_ε relativement à A , au sens de la définition 1.6, il peut être décrit simplement comme ceci (voir la figure 12.2) : l'étiquette d'un sommet σ de la forme $d\sigma_1 \dots d\sigma_n$, avec $\sigma_n \neq d$, est ε_{σ_n} . Toutes les autres étiquettes sont 1.

12.1. Exemples

Il règne une très grande variété parmi les groupes GGS, et nous nous bornerons à considérer les quelques exemples les plus simples. Naturellement, si $d = 1$ il n'y a que l'automorphisme trivial, et on suppose d'emblée $d \geq 2$. Voyons tout d'abord que si $d = 2$ les exemples sont tous bien connus :

PROPOSITION 12.2. *Soit G un groupe GGS agissant sur l'arbre \mathcal{T}_2 . Alors G est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, le groupe diédral infini.*

DÉMONSTRATION. On a forcément $A = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ engendré par a , et $\varepsilon_1 = a$. On constate que t_ε est d'ordre 2, et il ne reste qu'à montrer que l'élément $g = at_\varepsilon$ est d'ordre infini.

On a $g^2 = \phi_1(g^a)\phi_2(g)$, et donc en itérant $g^{2^n} = \phi_{1^n}(g^a) \dots \phi_{2^n}(g)$. Tous ces éléments sont distincts, car g^{2^n} appartient à $\text{Stab}_G(n)$ mais pas à $\text{Stab}_G(n+1)$. \square

Déjà quand $d = 3$ et $A = \mathfrak{A}_3$, le groupe alterné, on a des exemples très intéressants :

- $G_{(123),()}$ a été étudié par Jacek Fabrykowski et Narain Gupta [FG85, FG91], qui ont étudié son taux de croissance : ils montrent qu'il est de croissance intermédiaire. On le nomme Γ à la section 2.1.
- $G_{(123),(123)}$ a été étudié par l'auteur et Rostislav Grigorchuk dans [BG99b] et [BG99a]. On le nomme $\bar{\Gamma}$ à la section 2.1.
- $G_{(123),(132)}$ a été étudié par Narain Gupta et Saïd Sidki [GS83b], qui ont montré qu'il est de torsion, puis qu'il est de croissance intermédiaire, et ont obtenu des résultats très fins sur sa structure de sous-groupes et ses automorphismes. On le nomme $\bar{\bar{\Gamma}}$ à la section 2.1.

On peut considérer aussi l'exemple suivant, très intéressant : on prend $d = 3$, $A = \mathfrak{S}_3$, et on considère le groupe $G = G_{(12),(23)}$. Quelques résultats faciles, qu'on ne montrera pas, sont : G est un groupe fractal. Il admet des quotients G_n agissant sur Σ^n , qu'on peut décrire ainsi : si on note $\nu : \mathfrak{S}_3 \rightarrow \pm 1$ l'application signature, on peut décrire G_n en termes de portraits : ses éléments ont précisément les portraits Π tels que $\nu(\Pi(\sigma_1)\Pi(\sigma_2)\Pi(\sigma_3)) = 1$. On a donc

$$|G_n| = 2^{3^{n-1}} 3^{\frac{1}{2}(3^n-1)}.$$

En particulier, les 3-Sylow de G_n et $\text{Aut } \mathcal{T}_3 / \text{Stab}(n)$ sont isomorphes.

Il suit aussi de cette description que la complétion profinie de G est un pro-groupe à branches régulières ; en effet, considérons le sous-groupe K de G engendré par (123) et $t_{(12)(23)}$. Sa clôture \widehat{K} dans \widehat{G} est d'indice 2, et contient $\widehat{K} \times \widehat{K} \times \widehat{K}$ comme sous-groupe d'indice 12. Toutefois, on ne sait pas si G lui-même est à branches, car G n'a pas la propriété de congruence de la définition 1.8.

Pour $d = 4$, trois exemples ont été considérés par Grigorchuk, et toujours avec $A = \langle a = (1234) \rangle$ cyclique. Il s'agit de $G_{a,1,a}$, $G_{a,1,a^3}$ et $G_{1,a,1}$. Il a conjecturé, lors du congrès de Champoussin sur la croissance des groupes en 1994, qu'ils sont de croissance intermédiaire. On répondra à cette question dans le chapitre 14.

12.2. Une première réduction

Deux des hypothèses données dans la définition de groupe GGS — la transitivité de A , et le fait qu'il est engendré par $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{d-1}\}$ — ne sont pas essentielles.

Dans cette section, on suppose que G est un groupe proto-GGS, et on construit un groupe GGS, qu'on note G_∞ , qui est relié à G comme le décrit la proposition suivante :

PROPOSITION 12.3. *Soit G un groupe proto-GGS, avec groupe de sommet A . Alors il existe un groupe G_∞ avec les propriétés suivantes :*

- (1) G_∞ est un groupe GGS agissant sur l'arbre Σ_∞^* . On suppose toujours $d \in \Sigma_\infty$, même si la cardinalité de ce dernier peut être plus petite que d . On note A_∞ le groupe de racine de G_∞ et ζ sa suite de récurrence ;
- (2) A_∞ agit transitivement sur Σ_∞ , et est engendré par les ζ_i , pour $i \in \Sigma_\infty \setminus \{d\}$;
- (3) G_∞ est un groupe fractal ;
- (4) pour tout $n \in \mathbb{N}$ suffisamment grand et tout sommet $\sigma \in \Sigma^n$, le groupe de sommet G^σ (défini à la page 20) est isomorphe soit à un sous-groupe de A , soit à un sous-groupe de $A \times \langle t \rangle \times G_\infty$ se surjectant sur le troisième facteur ;
- (5) G_∞ est isomorphe à sous-groupe d'un quotient de G .

Montrons tout d'abord l'utilité de ce résultat :

COROLLARY 12.4. *Soit G un groupe proto-GGS, et G_∞ le groupe qui lui est associé par la proposition 12.3. On a alors :*

- (1) G est infini si et seulement si G_∞ l'est ;
- (2) G est de torsion si et seulement si G_∞ l'est ;
- (3) G est de croissance intermédiaire si et seulement si G_∞ l'est ;
- (4) G est à présentation finie si et seulement si G_∞ l'est ;

On verra au chapitre suivant que ces propriétés sont bien plus faciles à vérifier sur G_∞ que sur G .

DÉMONSTRATION. Montrons par exemple la première équivalence. Clairement si G est fini alors G_∞ l'est aussi. Réciproquement, on suppose G infini, et on considère $\text{Stab}_G(n)$, pour n suffisamment grand, qui est infini et est un sous-groupe du produit direct des G^σ , pour $\sigma \in \Sigma^n$. L'un au moins de ces G^σ est donc infini, et donc le produit direct de $A \times \langle t \rangle$ avec G_∞ est infini. Il s'ensuit que G_∞ est infini. \square

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 12.3. Soit $\sigma \in \Sigma^n$ un sommet à distance n de la racine. Alors soit σ est dans la G -orbite du sommet d^n , auquel cas G^σ contient t ; soit il n'y a pas, auquel cas G^σ est un sous-groupe de A . En effet, si $\sigma = g \cdot d^n$, on a $t = \psi_\sigma(gtg^{-1}) \in G^\sigma$, et vice versa.

De même, G^σ est engendré par certains des ε_i , et éventuellement par t , donc est un sous-groupe de G . Notons A^σ le sous-groupe de G^σ engendré par les ε_i qui y résident. Les A^σ sont naturellement arrangés en réseau, c'est-à-dire que pour tout σ préfixe de $\sigma\tau$ on a l'inclusion $A^{\sigma\tau} \leq A^\sigma$.

On a une tour décroissante de sous-groupes finis de A , qui doit donc se stabiliser à partir d'un certain rang, disons n . Pour tous les G^σ contenant t , donc dans l'orbite de d^n , les A^σ sont égaux, car les G^σ sont conjugués.

Posons $\Sigma_\infty = A^{d^n} \cdot d \subset \Sigma$. Alors A^{d^n} agit séparément sur Σ_∞ et sur $\Sigma \setminus \Sigma_\infty$; notons A_∞ le quotient de A^{d^n} agissant sur Σ_∞ .

Pour tout $i \in \Sigma_\infty \setminus \{d\}$, on peut factoriser $\varepsilon_i = \zeta_i \eta_i$, où ζ_i agit sur Σ_∞ et η_i agit sur son complémentaire. On définit alors G_∞ ainsi : c'est le groupe GGS agissant sur l'arbre $\mathcal{T}_{\Sigma_\infty}$, avec pour groupe de racine A_∞ et pour suite de récurrence $\zeta = (\zeta_i)$.

Par définition, A_∞ est transitif sur Σ_∞ . S'il n'était pas engendré par les ζ_i , cela voudrait dire que le groupe $A^{d^{n+1}}$ serait un sous-groupe strict de A^{d^n} , ce qui contredirait le choix de n ; on l'a en effet supposé assez grand pour que la suite des A^{d^n} soit stable.

G_∞ est un groupe fractal : prenons par exemple le sur-groupe de sommet G_∞^d du sommet d . Il contient t_ζ , comme l'image de t_ζ par ψ_d , et aussi tous les ζ_i , comme images de t_ζ^a , où $a \in A_\infty$ est choisi pour envoyer d sur i . On a donc $G_\infty^d = G_\infty$, et de même pour tous les autres groupes de sommet de niveau 1. On applique alors le lemme 1.9.

Toujours pour n suffisamment grand et $\sigma \in \Sigma^n$, on a vu que si σ n'est pas dans la G -orbite de d^n , alors G^σ est un sous-groupe de A . Si σ appartient à l'orbite de d^n , il est en revanche isomorphe à G^{d^n} . Ce dernier groupe se décompose en sous-produit direct, selon sa partie agissant sur le sous-arbre $\Sigma_\infty \Sigma^*$ et celle agissant sur $(\Sigma \setminus \Sigma_\infty) \Sigma^*$. La première n'est autre que G_∞ ; la seconde est un sous-groupe de $A \times \langle t \rangle$ car ces générateurs commutent quand on les restreint à $(\Sigma \setminus \Sigma_\infty) \Sigma^*$.

Finalement, on peut considérer le sous-groupe de G_∞ engendré par t_ε et les ε_i pour $i \in \Sigma_\infty$, et le projeter sur G_∞ en envoyant t_ε sur t_ζ et ε_i sur ζ_i . \square

La preuve donnée ci-dessus indique un algorithme, étant donné un groupe G défini par A et $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{d-1})$, qui construit un groupe GGS, G_∞ , partageant de nombreuses propriétés avec G . Nous explicitons cet algorithme comme suit :


- Soit G un groupe GGS avec groupe de racine A et suite de récurrence ε . On construit la suite de sous-groupes de A suivante : $A_0 = A$ puis par induction

$$A_{n+1} = \langle \varepsilon_i : i \in A_n \cdot d \setminus \{d\} \rangle.$$

- Soit A_∞ la limite $\bigcap A_n$ de cette tour de sous-groupes, et soit Σ_∞ l'orbite de d par A_∞ .
- Pour tous les $i \in \Sigma_\infty \setminus \{d\}$, on factorise ε_i comme $\zeta_i \eta_i$, où ζ_i est une permutation de Σ_∞ et η_i est une permutation de $\Sigma \setminus \Sigma_\infty$.
- Le groupe GGS G_∞ agit sur l'arbre $|\Sigma_\infty|$ -régulier $\mathcal{T}_{\Sigma_\infty}$, a pour groupe de racine A_∞ , et pour suite de récurrence $\zeta_{i \in \Sigma_\infty \setminus \{d\}}$.

Pour illustrer cet algorithme, considérons G un groupe proto-GGS engendré par $A = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ et t_ε . Si les ε_i engendrent le sous-groupe $n_1 A$ de A , on a l'inclusion $\text{Stab}_G(1) \subset G_1^d$, où $G_1 = \langle t_\varepsilon, n_1 A \rangle$. Ensuite, si $\{\varepsilon_{n_1}, \varepsilon_{2n_1}, \dots, \varepsilon_{d-n_1}\}$ engendrent le sous-groupe $n_2 A$ de A , il vient $\text{Stab}_{G_1}(1) \subset (A^{n_1-1} \times G_2)^{d/n_1}$, où $G_2 = \langle t_\varepsilon, n_2 A \rangle$, et ainsi de suite.

Propriétés algébriques

ans ce chapitre on décrit quelques propriétés algébriques des groupes GGS, et on donne des critères pour les propriétés suivantes : être de torsion, être infini, être de présentation finie, être de centre trivial. La propriété d'être de croissance intermédiaire sera étudiée au chapitre suivant.

Les deux premières propriétés — être de torsion et être infini — avaient été étudiées par Rostislav Grigorchuk dans le cas à d est premier et A cyclique, c'est-à-dire quand G est un sous-groupe du pro- d -Sylow $\text{Aut}_*(T)$. Il a donné des critères faciles à vérifier dans [Gri00], qu'on redémontrera en corollaires. Ces critères ont été généralisés à d une puissance de premier (toujours pour A cyclique) par Taras Vovkivsky [Vov98], mais leur formulation est assez lourde.

DEFINITION 13.1. Soit $H = \text{Stab}_G(1)$ le stabilisateur du premier niveau. L'application ψ introduite en (6, page 19) donne, par restriction, une flèche

$$(18) \quad \psi : \begin{cases} H & \rightarrow G_1 \times \cdots \times G_d \\ h & \mapsto (\phi_1^{-1}(h), \dots, \phi_d^{-1}(h)) \\ ata^{-1} & \mapsto (\epsilon_{a(1)}, \dots, \epsilon_{a(d)}), \end{cases}$$

où par convention on a $\epsilon_d = t$. En d'autres termes, ψ identifie un élément stabilisant le premier niveau à un d -uple d'éléments des G_i .

THEOREM 13.2. Si G est un groupe GGS avec $|\Sigma| \geq 2$, alors G est fractal et infini.

COROLLARY 13.3. Soit G un groupe proto-GGS pour d premier et A cyclique. Alors G est infini si et seulement si $\epsilon_i \neq 1$ pour un i .

DÉMONSTRATION. La suite descendante (A_n) construite dans la proposition 12.3 satisfait soit $A_n = A$ soit $A_n = 1$, pour tous les $n \geq 1$. Dans le premier cas, $G_\infty = G$, alors que dans le second $G_\infty = 1$. \square

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. Si $|\Sigma| \geq 2$, alors G a un sous-groupe d'indice $|A|$, donc au moins d , qui se surjecte sur G , par exemple par ψ_d . Il est donc infini. Une simple consultation de (18) montre que G est fractal. \square

Pour le résultat suivant, on a besoin d'une notation supplémentaire : pour $\Pi \in \mathfrak{S}_\Sigma$, on note $s(\Pi) = \epsilon_{\Pi(d)} \cdots \epsilon_{\Pi^\ell(d)} \in A$, où $\ell + 1$ est la période de d sous l'action de Π (on a donc $\Pi^{\ell+1}(d) = d$). On remarque que $s(1) = 1$.

THEOREM 13.4. G est un groupe de torsion si et seulement si pour tout $\Pi \in A$ on a $s^n(\Pi) = 1$ pour un $n \in \mathbb{N}$ assez grand.

COROLLARY 13.5. Soit G un groupe GGS pour d premier et A cyclique. Alors G est de torsion si et seulement si $\epsilon_1 \dots \epsilon_{d-1} = 1$.

DÉMONSTRATION. Comme A est simple et abélien, il suffit de tester la condition $s^n(\Pi) = 1$ sur un générateur, disons $(1, 2, \dots, d)$, de A . Elle équivaut alors à la condition du théorème. \square

On aura aussi besoin d'une notion de longueur pour G . Pour ce faire, on prend comme système générateur $A \cup \langle t \rangle$, et on note $|g|$ la longueur de l'élément g pour ce choix de générateurs.

LEMMA 13.6. Soit $g = (g_1, \dots, g_d) \in \text{Stab}_G(1)$. Alors $|g_i| \leq \frac{1}{2}(|g| + 1)$ pour tout i .

DÉMONSTRATION. On choisit une forme minimale pour g , c'est-à-dire un mot W tel que $|W| = |g|$. Au plus $\frac{1}{2}(|g| + 1)$ des lettres de W sont des t , et elles seules peuvent contribuer une lettre à g_i . \square

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. Pour la nécessité de la condition : soit $\Pi \in A$ tel que $s^n(\Pi) \neq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On considère l'élément $g = \Pi t$. Si ℓ est l'ordre de Π , on a $g^\ell = (*, \dots, *, s(\Pi)T)$ dans $\text{Stab}_G(1)$, où T est un produit de conjugués de t , et g^ℓ est non-trivial car $s(\Pi) \neq 1$. Continuant, si ℓ' est l'ordre de $s(\Pi)$, on a $g^{\ell\ell'} = (*, \dots, *, (*, \dots, *, s^2(\Pi)T'))$ dans $\text{Stab}_G(2)$, où T' est de nouveau un produit de conjugués de t , avec $g^{\ell\ell'}$ non-trivial car $s^2(\Pi) \neq 1$. On continue de même.

Pour la suffisance de la condition : soit $g = (g_1, \dots, g_d)\Pi$ dans G , avec $\Pi \in A$. Si $\Pi = 1$, on sait par induction que les g_i sont d'ordre fini, car ils sont plus courts que g par le lemme 13.6. Sinon, soit ℓ l'ordre de $\Pi|_{\Pi(d)}$, et considérons g^ℓ . Même s'il n'appartient pas à $\text{Stab}_G(1)$, on peut considérer, pour tout $i \in \Pi(d)$, sa restriction g' au sous-arbre $t\Sigma^*$, et on a $g' = (g'_1, \dots, g'_d)s(\Pi)$. De surcroît, la longueur de g' ne peut pas dépasser celle de g , car tous les symboles t de g' doivent provenir de symboles t différents dans g . On continue ainsi jusqu'à ce qu'on ait $s^n(\Pi) = 1$, auquel cas on retombe dans le cas traité au début, où $g^{(n)} \in \text{Stab}_G(1)$ et donc $g_i^{(n)}$ est plus court que g par le lemme 13.6, donc de torsion par induction. \square

THEOREM 13.7. *G est de présentation finie si et seulement si $|\Sigma| \leq 2$.*

DÉMONSTRATION. Si $|\Sigma| = 2$, alors G est diédral infini, donc de présentation finie. On suppose donc $|\Sigma| \geq 3$, et on montre que G n'est pas de présentation finie.

Soit $\langle A, t | \mathcal{R} \rangle$ une présentation de G pour un ensemble fini \mathcal{R} de relateurs. On suppose de plus que la longueur totale des relateurs est minimale.

L'application ψ décrite en (18) peut être considérée comme une substitution sur l'alphabet $S = A \cup \{t\}$ engendrant G ; on note T l'ensemble des mots sur S s'évaluant à un élément de H dans G , et $\tilde{\psi}$ l'application $T \rightarrow (S^*)^d$ induite par ψ .

Chacun des relateurs $r \in \mathcal{R}$, s'évaluant en 1 dans G , est à fortiori un mot dans T . On peut donc considérer $\tilde{\psi}(r) = (r_1, \dots, r_d)$. Par le lemme 13.6, toutes les relations r_i sont plus courtes que r , si $|r| \geq 2$.

Maintenant, $\langle S | r_d \text{ pour tout } r \in \mathcal{R} \rangle$ est une présentation du groupe de sommet G^d , isomorphe à G , dont la longueur totale des relations est plus petite. On obtient une contradiction avec la minimalité supposée de \mathcal{R} , à moins que tous les relateurs dans \mathcal{R} soient de longueur 1.

Comme G est supposé fractal, t est d'ordre d . S'il existe un ε_i dans la suite de récurrence de G d'ordre j divisant strictement d , on choisit un élément a de A envoyant d sur j , et on considère $x = [t^j, t^a]$. Ce mot appartient à T , et pour tout $i \neq d$ on a $\tilde{\psi}_i(x) \in A$. Comme A est d'ordre fini, on a même $\tilde{\psi}_i(x^n) = 1$ pour tout i , si on prend $n = |A|$. On a donc $[x^n, (x^n)^a] = 1$ dans G , ce qui est une relation non-triviale et de longueur strictement plus grande que 1.

Finalement, on suppose que tous les ε_i sont d'ordre d . On utilise seulement ici l'hypothèse que $|\Sigma| \geq 3$. Soit $a \in A$ envoyant d sur 1; alors $x = [t, t^a]$ satisfait $\tilde{\psi}_i(x^n) = 1$ pour tout $i \in \Sigma \setminus \{d, 1\}$. Soit $b \in A$ envoyant d sur 2, et $y = [t, t^b]$. Si on pose $z = [x^n, y^n]$, on a $\tilde{\psi}_i(z) = 1$ pour tout $i \in \Sigma \setminus \{d\}$. Finalement, $[z, z^a] = 1$ est une relation non-triviale et de longueur strictement plus grande que 1. \square

On remarque en passant qu'il existe deux stratégies pour montrer que de tels groupes ne sont pas de présentation finie. L'une, appliquée avec succès au groupe de Grigorchuk \mathcal{G} , consiste à construire des relateurs de plus en plus complexes eu moyen de substitutions analogues à la fonction σ de la section 6.2. La seconde, utilisée ici, a été introduite par Rostislav Grigorchuk dans [Gri80a]

Rostislav Grigorchuk a conjecturé par ailleurs qu'aucun groupe de croissance intermédiaire ne peut admettre de présentation finie. Cette question est toujours ouverte.

THEOREM 13.8. *Z(G) est trivial dès que $|\Sigma| \geq 2$.*

DÉMONSTRATION. On suppose que G est non-trivial. Soit $g \in Z(G)$. On montre d'abord que $g \in \text{Stab}_G(1)$. En effet, écrivons $g = ha$ avec $h \in \text{Stab}_G(1)$ et $a \in A$. Si $a(d) = d$ et $a(i) = j$ pour un $i \neq j$, alors g ne commute pas avec les éléments a' de A tels que $a'(q) = i$. Si $a(q) = i \neq q$ alors g ne commute pas avec t , car $\psi_q([g, t]) = a't^{-1}$ pour un $a' \in A$.

On procède maintenant par induction sur $|g|$. Si $|g| = 1$, on a $g \in A \cup \langle t \rangle$ et la discussion ci-dessus montre que g n'est pas central. On suppose donc $|g| \geq 2$. Si $g \in \text{Stab}_G(1)$, on considère $\psi(g) = (g_1, \dots, g_d)$ où chacun des g_i est plus court que g par le lemme 13.6, et l'induction peut être appliquée. Si $g \notin \text{Stab}_G(1)$, le paragraphe précédent montre que g ne peut pas être central. \square

On a aussi $\text{Cent}_{\text{Aut } \mathcal{T}}(G) = 1$ (ce qui est une affirmation plus faible que le théorème ci-dessus) dans un cadre plus général des groupes spéciaux de la définition 2.7 — voir le théorème 6 dans [Gri00].

PROPOSITION 13.9. *G est résiduellement fini.*

DÉMONSTRATION. Comme G est un sous-groupe de $\text{Aut } \mathcal{T}$, il suffit de le montrer pour $\text{Aut } \mathcal{T}$. Mais on a vu au chapitre 1 que $\text{Aut } \mathcal{T}$ est approximé par ses quotients finis $\text{Aut } \mathcal{T} / \text{Stab}(n)$. \square

THEOREM 13.10. *Si G est infini, alors il contient des éléments d'ordre arbitrairement grand (éventuellement infini).*

DÉMONSTRATION. Soit $a \in A$ agissant non-trivialement sur d , et soit n la longueur de l'orbite de d par a . Considérons le sous-groupe $G^{(n)}$ engendré par les puissances n -ièmes d'éléments de G , et $I = G^{(n)} \cap \text{Stab}_G(d)$.

Ce sous-groupe I contient $(at_\varepsilon)^n$, et est normal dans $\text{Stab}_G(d)$; ainsi son image par ϕ_d est un sous-groupe normal J de G contenant bt_ε pour un certain $b \in A$. De plus, G/J est un quotient de A , donc J est d'indice au plus $|A|$ dans G et contient $\text{Stab}_G(1)$, puisque son action sur Σ^* peut se lire sur Σ . Ainsi I contient $\text{Stab}_G(2)$.

Supposons maintenant par l'absurde que G est d'exposant N ; ainsi $\text{Stab}_G(2)$ est d'exposant au moins N , puisqu'il se surjecte sur G , et I est d'exposant au moins N , puisqu'il contient $\text{Stab}_G(2)$. Il suit que G est d'exposant au moins nN , ce qui est une contradiction. \square

On introduit un affaiblissement de la notion de groupe branché :

DEFINITION 13.11. Soit G un groupe agissant sur l'arbre \mathcal{T} . Il est *presque à branches* sur son sous-groupe K s'il agit sphériquement transitivement, et si $K \times \dots \times K$ est un sous-groupe de $\psi(K)$.

On remarque que tout groupe sphériquement transitif est presque à branches sur 1, son sous-groupe trivial. S'il est presque à branches sur K et que celui-ci est d'indice fini dans G , alors G est à branches. Clairement, si K est non-trivial alors il est infini.

THEOREM 13.12. *Soit G un groupe GGS avec $|\Sigma| \geq 3$. Alors il est presque à branches sur*

$$K = ((G')^{(|A|)})',$$

où $H^{(n)}$ désigne le sous-groupe de H engendré par les puissances n -ièmes de ses éléments, et K n'est pas trivial.

DÉMONSTRATION. G' contient tous les éléments de la forme $[t, t^a]$, qui peuvent s'écrire $(a_1, \dots, [a_i, t], a_{i+1}, \dots, [t, a_d])$. Notons $n = |A|$. Ainsi, $(G')^{(|A|)}$ contient tous éléments s'écrivant $(1, \dots, [a_i, t]^n, 1, \dots, [t, a_d]^n)$, et finalement son groupe dérivé contient tous les éléments de la forme $(1, \dots, [[t, a]^n, [t, a']^n])$. On a ainsi $1 \times \dots \times 1 \times K \subset K$.

Pour montrer que K n'est pas trivial, on argumente d'abord que G' est non-trivial, car d'indice fini dans un groupe infini; ensuite, par le théorème 13.10, que $(G')^{(n)}$ est non-trivial; ce dernier groupe, par la preuve du théorème 13.10, admet même un sous-groupe se surjectant sur G , et ne peut donc en aucun cas être abélien. \square

Croissance des mots



ans une large mesure, l'intérêt pour les groupes GGS a été amorcé par la recherche de groupes de croissance intermédiaire. On montre dans ce chapitre qu'essentiellement tous les groupes GGS sont de croissance intermédiaire.

THEOREM 14.1. *Soit G un groupe GGS. Alors G est de croissance superpolynômiale si et seulement si $|\Sigma| \geq 3$.*

DÉMONSTRATION. Si $|\Sigma| \leq 2$, alors G est soit le groupe trivial, soit le groupe diédral infini ; dans tous les cas, il est de croissance polynômiale.

Supposons à présent $|\Sigma| \geq 3$. Par le théorème 13.12, G est presque à branches sur un sous-groupe K infini.

Supposons par l'absurde que K est de croissance polynômiale, disons $\gamma_K \sim n^D$. Comme $K^d < \psi(K)$, on a $n^{dD} \sim \gamma_{K^d} \lesssim \gamma_K \sim n^D$, ce qui est une contradiction. Il suit que K est de croissance superpolynômiale.

Comme G contient K , on a $\gamma_G \gtrsim \gamma_K$ et donc G est aussi de croissance superpolynômiale. \square

THEOREM 14.2. *Soit G un groupe GGS. Alors G est de croissance sous-exponentielle.*

On fixe une fois pour toutes le système de générateurs de G : il s'agit de

$$S = A\langle t \rangle = \{at^i \mid a \in A, 0 \leq i < d\}.$$

On note $|g|$ la longueur minimale de l'élément $g \in G$ en tant que mot sur l'alphabet S , et aussi $|w|$ la longueur du mot $w \in S^*$. À au plus 1 près (correspondant à un élément de A placé à la fin), $|g|$ est le nombre de sous-mots maximaux de w constitués uniquement de t et de t^{-1} , minimal dans une écriture de g .

On a une flèche naturelle $\pi : S^* \rightarrow G$, qui correspond à l'évaluation dans G . Elle admet une rétraction $\nu : G \rightarrow S^*$, qui est en fait un choix de forme normale minimale pour G . Bien évidemment ν n'est pas unique.

DEFINITION 14.3. Une *fusion élémentaire* sur un mot w est une application d'une des transformations suivantes, pour $a, b \in A$:

$$\begin{aligned} at^0 \cdot bt^i &\rightsquigarrow abt^i \\ at^i \cdot 1t^j &\rightsquigarrow at^{i+j} \end{aligned}$$

diminuant de 1 la longueur de w . On note $\rho : S^* \rightarrow S^*$ la clôture itérative de cette opération.

Par exemple, supposons $d = 5$ et $A = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \langle a \rangle$. Alors, en tant que mots, on a $|a| = 1$, $|at| = 1$ et $|at^2a^3t^4a^5ta^2t| = 4$. Une fusion peut se produire dans ce dernier mot, donnant le mot $at^2a^3t^4ta^2t$ de norme 3 ; une nouvelle fusion donne le mot $at^2a^3a^2t$ de norme 2, et une dernière fusion donne at^3 de norme 1. Il s'agit là de la longueur minimale de l'élément de départ, et on a donc $\rho(at^2a^3t^4ta^2t) = at^3$.

Dans la plupart des cas, un mot peut être raccourci en utilisant d'autres opérations que la fusion. En fait, la réduction par fusion n'est autre que la mise sous forme normale dans le groupe $A * \langle t \rangle$, dont G est un quotient — on prouve ainsi que l'opération ρ est bien définie, c'est-à-dire que l'ordre dans lequel on exécute les fusions sur un mot n'a pas d'influence sur le résultat final.

L'application ψ définie en (18, page 73) se relève en une application

$$\tilde{\psi} : \begin{cases} \pi^{-1}(H) & \rightarrow (S^*)^d \\ w & \mapsto (w_1, \dots, w_d) \end{cases}$$

sur S^* , satisfaisant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(H) & \xrightarrow{\tilde{\psi}} & (S^*)^d \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ H & \xrightarrow{\psi} & G^d \end{array}$$

LEMMA 14.4. *On a, pour tout $\eta \in (0, 1)$,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{(1-\eta)n} \right)^{1/n} = \frac{1}{\eta^\eta (1-\eta)^{1-\eta}} =: C(\eta).$$

DÉMONSTRATION. On écrit

$$\left(\frac{n}{(1-\eta)n} \right) = \frac{n!}{(\eta n)! ((1-\eta)n)!}.$$

Par la formule de Stirling [GKP94, équation (9.29)], on a les approximations $\sqrt[n]{n!} \approx n/e$, $\sqrt[n]{(\eta n)!} \approx (\eta n/e)^\eta$, et $\sqrt[n]{((1-\eta)n)!} \approx ((1-\eta)n/e)^{1-\eta}$, d'autant meilleures quand $n \rightarrow \infty$. \square

LEMMA 14.5. *Pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+$, on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a^n + b^n)^{1/n} = \max\{a, b\}.$$

DÉMONSTRATION. Sans perte de généralité, on suppose $a \geq b$; on a alors, pour $x = b/a \leq 1$,

$$a \leq (a^n + b^n)^{1/n} = a \sqrt[n]{1 + x^n} \leq a(1 + x/n) \rightarrow a. \quad \square$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 14.2. On va montrer qu'il y a un nombre sous-exponentiel d'éléments de longueur donnée; plus précisément, que

$$\lambda = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\{g \in G \mid |g| \leq n\}|} = 1.$$

Soit K un entier et $\eta \in (0, 1)$ à fixer plus tard. Soit $V \subset \text{Stab}_G(K)$ l'ensemble des éléments de longueur au plus n et fixant le K -ième niveau, et soit $W = \nu^{-1}(V)$ un ensemble de longueur minimale leur correspondant. On veut estimer $|W|$; pour ce faire, soit $w \in W$, et notons $\tilde{\psi}^K(w) = (w_{1\dots 1}, \dots, w_{d\dots d})$. Alors

$$\sum_{\sigma \in \Sigma^K} |\rho(w_\sigma)| = |w| - \sum_{\sigma \in \Sigma^K} \text{nombre de fusions dans } w_\sigma.$$

On suppose par l'absurde que le taux de croissance λ de G est strictement plus grand que 1. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que

$$(\lambda - \varepsilon)^n < \gamma_G(n) < (\lambda + \varepsilon)^n$$

est vérifié dès que $n \geq N$. On définit la partition suivante de W :

$$\begin{aligned} X &= \left\{ w \in W \mid \sum_{\sigma \in \Sigma^K} |\rho(w_\sigma)| < \eta |w| \right\}, \\ Y &= \left\{ w \in W \mid \sum_{\sigma \in \Sigma^K} |\rho(w_\sigma)| \geq \eta |w| \right\}. \end{aligned}$$

Ainsi X est composé des mots w ayant beaucoup de fusions dans leur décomposition de niveau K , et Y des mots ayant peu de fusions. On estime indépendamment les cardinalités respectives $\gamma_X(n)$ et $\gamma_Y(n)$ de X et Y .

Il y a un polynôme $P(n)$ tel que

$$(19) \quad \gamma_X(n) \leq P(n)(\lambda + \varepsilon)^{\eta n} :$$

en effet, tout $w \in W$ est déterminé par les $\rho(w_\sigma)$, dont on note n_σ les longueurs normes respectives, et donc

$$\gamma_X(n) \leq \sum_{\{n_\sigma\}} \prod_{\sigma \in \Sigma^K} \gamma_G(n_\sigma),$$

où la somme parcourt les partitions entières de ηn en d^K parties. Quand $n_i < N$, les $\gamma_G(n_\sigma)$ ne peuvent contribuer qu'un facteur borné, $\gamma_G(N)$, au produit, et on a donc

$$\gamma_G(n_1) \cdots \gamma_G(n_d) < \gamma_G(N)^{d^K} (\lambda + \varepsilon)^{\eta n}.$$

Le nombre de partitions de n en p parties est borné par le polynôme

$$P'_p(n) = \frac{n^{p-1}}{p!(p-1)!}$$

(voir, par exemple, [LW92, théorème 15.1]) et l'affirmation (19) est vraie pour le choix $P(n) = \gamma(N)^{d^K} P'_{p^K}(n)$.

Par ailleurs, on peut considérer au lieu de Y l'ensemble plus grand de tous les mots de S^* ayant au plus $(1 - \eta)n$ fusions dans leur décomposition de niveau K . Si on définit Y_0 comme l'ensemble de tous les mots réduits de longueur au plus n (c'est-à-dire $Y_0 = \rho(S^n) \cap \pi^{-1}(\text{Stab}_G(n))$), et inductivement

$$Y_{k+1} = \{w \in Y_k \mid \rho(\tilde{\psi}_i(w)) \in Y_k \text{ pour tout } i \in \Sigma\},$$

où le nombre total de fusions dans les $\tilde{\psi}_i(w)$ n'excède pas $(1 - \eta)n$, on a $|Y_0| \leq |S|^n$ et

$$|Y_{k+1}| \leq \binom{n}{(1-\eta)n} \left(\frac{|A|-1}{|A|} \right)^{\eta n} \left(\frac{1}{|A|} \right)^{(1-\eta)n} |Y_k| \approx \left(C(\eta) \frac{|A|-1}{|A|} \right)^n |Y_k|$$

pour n suffisamment grand et $\eta < 1$, par le lemme 14.4. En effet il y a $\approx n$ symboles ' t ' dans les $\tilde{\psi}_i(w)$ pour $w \in Y_k$, séparés par des symboles de A ; et il y a au plus $(1 - \eta)n$ fusions quand au plus $(1 - \eta)n$ de ces symboles de A sont triviaux, ce qui se produit le nombre de fois indiqué. Clairement, on a $|Y| \leq |Y_K|$, et ainsi

$$(20) \quad \gamma_Y(n) \leq \left(|S| C(\eta)^K \frac{(|A|-1)^K}{|A|^K} \right)^n.$$

Toujours pour des $n \geq N$, on combine (19) et (20) en écrivant

$$\begin{aligned} (\lambda - \varepsilon)^n &\leq \gamma_G(n) \leq [G : \text{Stab}_G(K)] (\gamma_X(n) + \gamma_Y(n)) \\ &\leq [G : \text{Stab}_G(K)] \left(P(n)(\lambda + \varepsilon)^{\eta n} + \left(|S| C(\eta)^K \frac{(|A|-1)^K}{|A|^K} \right)^n \right), \end{aligned}$$

on en prend la racine n -ième et on laisse n tendre vers l'infini. Utilisant le lemme 14.5, on obtient

$$\lambda - \varepsilon \leq \max \left\{ (\lambda + \varepsilon)^\eta, |S| C(\eta)^K \left(\frac{|A|-1}{|A|} \right)^K \right\}.$$

Maintenant, on fait tendre ε vers 0; on prend $\eta < 1$ suffisamment grand pour que $L := C(\eta) \frac{|A|-1}{|A|}$ soit strictement plus petit que 1; et on prend K assez grand pour qu'on ait $|S| L^K < \lambda$. On a ainsi obtenu

$$\lambda \leq \max \{ \lambda^\eta, |S| L^K \},$$

ce qui est une contradiction. \square

Annexes

Liste des publications

Le premier article auquel j'ai participé est *n* Estimates for simple random walks on fundamental groups of surfaces *z*, [BCCH97], dans lequel on estime par divers moyens le rayon spectral de la marche aléatoire simple sur le groupe fondamental J_g d'une surface orientable de genre g donné par la présentation

$$J_g = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid [a_1, b_1] \dots [a_g, b_g] = 1 \rangle.$$

Le résultat principal obtenu dans cet article est l'encadrement du rayon spectral (défini en 9.1) de J_g , pour le système de générateurs fixé ci-dessus :

$$\frac{\sqrt{4g-1}}{2g} < v(J_g) \leq \frac{\sqrt{4g-2} + \frac{1}{2}}{2g},$$

où la première inégalité est due à Harry Kesten [Kes59].

Toujours avec pour but d'obtenir des approximations de $v(J_g)$, j'ai écrit un court texte améliorant la borne inférieure de $v(J_g)$ [Bar96], qui a fait l'objet d'une présentation à la conférence de Castelvechio en Italie. Le principe y était de compter un ensemble de courbes fermées dans le graphe de Cayley de J_g ressemblant à des *n* hydres *z*, c'est-à-dire des chemins réductibles au chemin trivial par suppression d'aller-retours, à ceci près qu'ils ont des *n* têtes *z* entourant des cellules élémentaires du graphe, qu'il faut *n* couper *z* pour pouvoir réduire le chemin. À titre d'exemple, la borne inférieure due à Harry Kesten donne $v(J_2) > 0.66143$; la croissance des *n* hydres *z* donne

$$v(J_2) \geq 0.6623.$$

Plus tard, j'ai introduit une autre classe de chemins fermés dans le graphe de Cayley de J_2 , que j'ai appelé des *n* feuilles de houx *z* [Bar96] et qui englobe la classe des *n* hydres *z*. Essentiellement, les *n* feuilles de houx *z* sont des structures récursives obtenues par imbrication d'hydres. J'obtiens ainsi

$$v(J_2) \geq 0.6624.$$

L'amélioration peut sembler insignifiante, mais il semble que cette approximation est très bonne — il y a beaucoup plus à gagner du côté de la borne supérieure.

Dès mes débuts d'assistantat (1995), j'ai collaboré avec Tullio Ceccherini-Silberstein, en particulier sur les différents problèmes de comptage qu'on rencontre dans le graphe de Cayley de J_g . Nous avons écrit un bref article donnant des résultats sur la croissance de ces graphes, qui est reproduit à l'annexe C.

Le premier article mathématique que j'ai publié seul est [Bar99]. Il est l'objet de la deuxième partie de cette thèse.

J'ai ensuite obtenu des approximations de la croissance du groupe de Grigorchuk \mathfrak{G} , tant par le haut [Bar98] que par le bas [Bar00d]. Ces deux articles sont résumés à la section 6.5, et sont reproduits aux annexes A et B.

Après la publication de [Bar98], je suis entré en contact avec Zoran Šunić avec lequel j'ai étendu les résultats de [Bar98] à d'autres groupes. L'article écrit en commun [BŠ00] est résumé au chapitre 7.

J'ai eu la grande chance de rencontrer Rostislav Grigorchuk en 1993, et de profiter depuis de ses nombreux conseils et idées. Nous avons ainsi écrit l'article [BG00] sur les algèbres de Lie associées à son groupe, qui est résumé à la section 6.4 et est reproduit à l'annexe D. Nous

avons ensuite écrit deux articles [**BG99b**, **BG99a**] étudiant le spectre de représentations quasi-régulières associées à des groupes fractals, qui sont résumés aux chapitres 5 et 4, et reproduits aux annexes E et F.

J'ai aussi découvert il y a cinq ans (en 1995) une propriété curieuse de polynômes sur le corps à deux éléments, et ce, en connexion avec un problème de combinatoire paru à l'Olympiade de Mathématiques de 1993. Je n'ai rédigé ces recherches qu'en 1999 [**Bar00b**].

Enfin, dans un domaine un peu plus éloigné, j'ai obtenu à l'aide d'un ordinateur deux grilles de mots croisés de taille 9×9 sans aucune case noire [**BB96**]. Je m'autorise à citer cet article parce qu'il est paru dans une revue mathématique.

Bibliographie

- [Ale72] Sergey V. Alešin, *Finite automata and the Burnside problem for periodic groups*, Mat. Zametki **11** (1972), 319–328.
- [And76] George E. Andrews, *The theory of partitions*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Amsterdam, 1976, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 2.
- [Bar88] Michael Barnsley, *Fractals everywhere*, Academic Press Inc., Boston, MA, 1988.
- [Bar96] Laurent Bartholdi, *Lower estimates for the norm of $X_{\ell,m}$ using hydrae*, ESF Conference on Algebra and Discrete Mathematics, Castelvecchio Pascoli, 13–18 July 1996, July 1996.
- [Bar98] Laurent Bartholdi, *The growth of Grigorchuk’s torsion group*, Internat. Math. Res. Notices **20** (1998), 1049–1054.
- [Bar99] Laurent Bartholdi, *Counting paths in graphs*, Enseignement Math. **45** (1999), 83–131.
- [Bar00a] Laurent Bartholdi, *A class of groups acting on rooted trees*, unpublished, 2000.
- [Bar00b] Laurent Bartholdi, *Lamps, factorizations, and finite fields*, Amer. Math. Monthly **107** (2000), no. 5.
- [Bar00c] Laurent Bartholdi, *Lie algebras and growth in branch groups*, preprint, 2000.
- [Bar00d] Laurent Bartholdi, *Lower bounds on the growth of Grigorchuk’s torsion group*, to appear in Internat. J. Algebra Comput., 2000, math.GR/9910068.
- [Bas72] Hyman Bass, *The degree of polynomial growth of finitely generated nilpotent groups*, Proc. London Math. Soc. (3) **25** (1972), 603–614.
- [Bau93] Gilbert Baumslag, *Topics in combinatorial group theory*, Lectures in Mathematics, ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, Basel, 1993.
- [BB96] Laurent Bartholdi and Nicolas Bartholdi, *Mots croisés Mélanophobes*, Gaz. Math. (1996), no. 70, 45–47.
- [BC99] Laurent Bartholdi and Tullio G. Ceccherini-Silberstein, *Growth series of some hyperbolic graphs and salem numbers*, submitted, 1999, math.GR/9910067.
- [BCCH97] Laurent Bartholdi, Serge Cantat, Tullio G. Ceccherini-Silberstein, and Pierre de la Harpe, *Estimates for simple random walks on fundamental groups of surfaces*, Colloq. Math. (1997), no. 1, 173–193.
- [BDG⁺92] Marie-José Bertin, Annette Decomps-Guilloux, Marthe Grandet-Hugot, Martine Pathiaux-Delefosse, and Jean-Pierre Schreiber, *Pisot and Salem numbers*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1992, With a preface by David W. Boyd.
- [Ben83] Michael Benson, *Growth series of finite extensions of \mathbb{Z}^n are rational*, Invent. Math. **73** (1983), 251–269.
- [Ber83] Alexander E. Berezniĭ, *Discrete subexponential groups*, Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) **123** (1983), 155–166 (Russian).
- [BG99a] Laurent Bartholdi and Rostislav I. Grigorchuk, *On parabolic subgroups and Hecke algebras of some fractal groups*, submitted, 1999, math.GR/9911206.
- [BG99b] Laurent Bartholdi and Rostislav I. Grigorchuk, *On the spectrum of Hecke type operators related to some fractal groups*, submitted, 1999, math.GR/9910102.
- [BG00] Laurent Bartholdi and Rostislav I. Grigorchuk, *Lie methods in growth of groups and groups of finite width*, Computational and Geometric Aspects of Modern Algebra (Michael Atkinson et al., ed.), London Math. Soc. Lect. Note Ser., vol. 275, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000, pp. 1–27.
- [BH97] Marc Burger and Pierre de la Harpe, *Constructing irreducible representations of discrete groups*, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. **107** (1997), no. 3, 223–235.
- [Bok63] Leonid A. Bokut’, *A basis for free polynilpotent Lie algebras*, Algebra i Logika Sem. **2** (1963), no. 4, 13–19.
- [BORT96] Hyman Bass, Maria Victoria Otero-Espinar, Daniel Rockmore, and Charles Tresser, *Cyclic renormalization and automorphism groups of rooted trees*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1621, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [Bos99] Nigel Boston, *p-adic Galois representations and pro-p Galois groups*, Birkhäuser, Basel, 1999, to appear in Horizons in Profinite Groups (Dan Segal ed.).

- [Bra84] Wilfried Brauer, *Automatentheorie*, B. G. Teubner, Stuttgart, 1984, Eine Einführung in die Theorie endlicher Automaten. [An introduction to the theory of finite automata].
- [BS82] Jean B ellissard and Barry Simon, *Cantor spectrum for the almost Mathieu equation*, J. Funct. Anal. **48** (1982), no. 3, 408–419.
- [BS97] Yiftach Barnea and Aner Shalev, *Hausdorff dimension, pro- p groups, and Kac-Moody algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **349** (1997), no. 12, 5073–5091.
- [BS 00] Laurent Bartholdi and Zoran  unik, *On the word and period growth of some groups of tree automorphisms*, to appear in Comm. Algebra, 2000, math.GR/0005113.
- [BSV99] Andrew M. Brunner, Said N. Sidki, and Ana Cristina Vieira, *A just nonsolvable torsion-free group defined on the binary tree*, J. Algebra **211** (1999), no. 1, 99–114.
- [Bur02] William Burnside, *On an unsettled question in the theory of discontinuous groups*, Quart. J. Pure Appl. Math. **33** (1902), 230–238.
- [BV 97] C edric B egu in, Alain Valette, and Andrzej  uk, *On the spectrum of a random walk on the discrete Heisenberg group and the norm of Harper’s operator*, J. Geom. Phys. **21** (1997), no. 4, 337–356.
- [Can83] James W. Cannon, *The growth of the closed surface groups and the compact hyperbolic Coxeter groups*, unpublished, March 1983.
- [Cat38] Eug ene C. Catalan, *Note sur une  quation aux diff erences finies*, J. Math. Pures Appl. (9) **3** (1838), 508–516.
- [CDS79] Drago   M. Cvetkovi c, Michael Doob, and Horst Sachs, *Spectra of graphs*, Pure and Applied Mathematics, Academic Press, 1979.
- [CFP96] James W. Cannon, William J. Floyd, and William R. Parry, *Introductory notes on Richard Thompson’s groups*, Enseign. Math. (2) **42** (1996), no. 3-4, 215–256.
- [CG97] Tullio G. Ceccherini-Silberstein and Rostislav I. Grigorchuk, *Amenability and growth of one-relator groups*, Enseign. Math. (2) **43** (1997), no. 3-4, 337–354.
- [CHMM98] Alan L. Carey, Keith C. Hannabuss, Varghese Mathai, and Paul J. McCann, *Quantum Hall effect on the hyperbolic plane*, Comm. Math. Phys. **190** (1998), no. 3, 629–673.
- [CMS98] Tullio G. Ceccherini-Silberstein, Antonio Machi, and Fabio Scarabotti, *Un’introduzione al gruppo di grigorchuk*, to appear, 1998.
- [Coh82] Joel M. Cohen, *Cogrowth and amenability of discrete groups*, J. Funct. Anal. **48** (1982), no. 3, 301–309.
- [Con94] Alain Connes, *Noncommutative geometry*, Academic Press, San Diego, CA., 1994.
- [Coo93] Michel Coornaert, *Mesures de Patterson-Sullivan sur le bord d’un espace hyperbolique au sens de Gromov*, Pacific J. Math. **159** (1993), no. 2, 241–270.
- [Cox54] Harold S. M. Coxeter, *Regular honeycombs in hyperbolic space*, ICM Amsterdam, vol. 3, 1954, pp. 155–169.
- [CR90] Charles W. Curtis and Irving Reiner, *Methods of representation theory. Vol. I*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1990, With applications to finite groups and orders, Reprint of the 1981 original, A Wiley-Interscience Publication.
- [CW92] James W. Cannon and Philip Wagreich, *Growth functions of surface groups*, Math. Ann. **293** (1992), no. 2, 239–257.
- [DdSMS91] John D. Dixon, Marcus P. F. du Sautoy, Avinoam Mann, and Dan Segal, *Analytic pro- p -groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- [Dia88] Persi Diaconis, *Group representations in probability and statistics*, Institute of Mathematical Statistics, Hayward, CA, 1988.
- [Dix77] Jacques Dixmier, *C^* -algebras*, North-Holland Mathematical Library, vol. 15, North Holland, Amsterdam, 1977, Translated from the French by Francis Jellet.
- [dMvS93] Welington de Melo and Sebastian van Strien, *One-dimensional dynamics*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [ECH⁺92] David B. A. Epstein, James W. Cannon, Derek F. Holt, Silvio V. F. Levy, Michael S. Paterson, and William P. Thurston, *Word processing in groups*, Jones and Bartlett Publishers, 1992.
- [Ego84] Georgii P. Egorichev, *Integral representation and the computation of combinatorial sums*, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1984, Translated from the Russian by H. H. McFadden, Translation edited by Lev J. Leifman.
- [Eil74] Samuel Eilenberg, *Automata, languages, and machines*, vol. A, Academic Press, 1974.
- [Far98] Michael Farber, *Geometry of growth : approximation theorems for L^2 invariants*, Math. Ann. **311** (1998), no. 2, 335–375.
- [FG85] Jacek Fabrykowski and Narain D. Gupta, *On groups with sub-exponential growth functions*, J. Indian Math. Soc. (N.S.) **49** (1985), no. 3-4, 249–256.

- [FG91] Jacek Fabrykowski and Narain D. Gupta, *On groups with sub-exponential growth functions. II*, J. Indian Math. Soc. (N.S.) **56** (1991), no. 1-4, 217–228.
- [Flo92] William J. Floyd, *Growth of planar Coxeter groups, P. V. numbers, and Salem numbers*, Math. Ann. **293** (1992), 475–483.
- [Føl57] Erling Følner, *Note on groups with and without full Banach mean value*, Math. Scand. **5** (1957), 5–11.
- [FP87] William J. Floyd and Steven P. Plotnick, *Growth functions on Fuchsian groups and the Euler characteristic*, Invent. Math. **88** (1987), no. 1, 1–29.
- [FP94] William J. Floyd and Steven P. Plotnick, *Growth functions for semi-regular tilings of the hyperbolic plane*, Geom. Dedicata **53** (1994), 1–23.
- [GC71] Ferenc Gécseg and Béla Csákány, *Algebraic theory of automata*, Akadémiai Kiado, Budapest, 1971.
- [GH90] Étienne Ghys and Pierre de la Harpe, *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, Progress in Mathematics, vol. 83, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1990, Papers from the Swiss Seminar on Hyperbolic Groups held in Bern, 1988.
- [GH97] Rostislav I. Grigorchuk and Pierre de la Harpe, *On problems related to growth, entropy, and spectrum in group theory*, J. Dynam. Control Systems **3** (1997), no. 1, 51–89.
- [GHZ98] Rostislav I. Grigorchuk, Wolfgang N. Herfort, and Pavel A. Zaleskii, *The profinite completion of certain torsion p -groups*, Proceedings of the International Algebra Conference in Memory of Kurosh (Moscow), 1998.
- [GKP94] Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, and Oren Patashnik, *Concrete mathematics (2nd edition)*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1994.
- [Glu61] Victor M. Gluškov, *Abstract theory of automata*, Uspehi Mat. Nauk **16** (1961), no. 5 (101), 3–62.
- [Gol64] Evgeniĭ S. Golod, *On nil-algebras and finitely approximable p -groups*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **28** (1964), 273–276.
- [Gol68] Evgeniĭ S. Golod, *Some problems of Burnside type*, Proc. Internat. Congr. Math. (Moscow, 1966), Izdat. "Mir", Moscow, 1968, pp. 284–289.
- [Gri80a] Rostislav I. Grigorchuk, *On Burnside's problem on periodic groups*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. **14** (1980), no. 1, 53–54, English translation : Functional Anal. Appl. **14** (1980), 41–43.
- [Gri80b] Rostislav I. Grigorchuk, *Symmetrical random walks on discrete groups*, Multicomponent random systems, Dekker, New York, 1980, pp. 285–325.
- [Gri83] Rostislav I. Grigorchuk, *On the Milnor problem of group growth*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **271** (1983), no. 1, 30–33.
- [Gri84] Rostislav I. Grigorchuk, *Degrees of growth of finitely generated groups and the theory of invariant means*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **48** (1984), no. 5, 939–985, English translation : Math. USSR-Izv. **25** (1985), no. 2, 259–300.
- [Gri85] Rostislav I. Grigorchuk, *Degrees of growth of p -groups and torsion-free groups*, Mat. Sb. (N.S.) **126(168)** (1985), no. 2, 194–214, 286.
- [Gri89] Rostislav I. Grigorchuk, *On the Hilbert-Poincaré series of graded algebras that are associated with groups*, Mat. Sb. **180** (1989), no. 2, 207–225, 304, English translation : Math. USSR-Sb. **66** (1990), no. 1, 211–229.
- [Gri91] Rostislav I. Grigorchuk, *On growth in group theory*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I, II (Kyoto, 1990) (Tokyo), Math. Soc. Japan, 1991, pp. 325–338.
- [Gri99] Rostislav I. Grigorchuk, *On the system of defining relations and the Schur multiplier of periodic groups generated by finite automata*, Groups St. Andrews 1997 in Bath, I, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999, pp. 290–317.
- [Gri00] Rostislav I. Grigorchuk, *Just infinite branched groups*, Horizons in Profinite Groups (Dan Segal, Markus P. F. du Sautoy, and Aner Shalev, eds.), Birkhäuser, Basel, 2000, pp. 121–179.
- [Gro81a] Mikhael Gromov, *Groups of polynomial growth and expanding maps*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1981), no. 53, 53–73.
- [Gro81b] Mikhael Gromov, *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, CEDIC, Paris, 1981, Edited by J. Lafontaine and P. Pansu.
- [Gro84] Mikhael Gromov, *Infinite groups as geometric objects*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Warsaw, 1983) (Warsaw), PWN, 1984, pp. 385–392.
- [GS64] Evgeniĭ S. Golod and Igor R. Shafarevich, *On the class field tower*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **28** (1964), no. 2, 261–272 (Russian).
- [GS83a] Narain D. Gupta and Said N. Sidki, *On the Burnside problem for periodic groups*, Math. Z. **182** (1983), 385–388.
- [GS83b] Narain D. Gupta and Said N. Sidki, *Some infinite p -groups*, Algebra i Logika **22** (1983), no. 5, 584–589.

- [GS84] Narain D. Gupta and Said N. Sidki, *Extension of groups by tree automorphisms*, Contributions to group theory, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1984, pp. 232–246.
- [Gui70] Yves Guivarc’h, *Groupes de Lie à croissance polynomiale*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **271** (1970), A237–A239.
- [Gui73] Yves Guivarc’h, *Croissance polynomiale et périodes des fonctions harmoniques*, Bull. Soc. Math. France **101** (1973), 333–379.
- [GW99] Rostislav I. Grigorchuk and John S. Wilson, *The conjugacy problem for certain branch groups*, unpublished, 1999.
- [GWW92] Carolyn Gordon, David L. Webb, and Scott Wolpert, *One cannot hear the shape of a drum*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **27** (1992), no. 1, 134–138.
- [GŽ97] Rostislav I. Grigorchuk and Andrzej Żuk, *On the asymptotic spectrum of random walks on infinite families of graphs*, Proceedings of the Conference “Random Walks and Discrete Potential Theory” (Cortona) (M. Picardello and W. Woess, eds.), Symposia Mathematica (Cambridge University Press), 22–28 June 1997, (to appear), pp. 134–150.
- [Har00] Pierre de la Harpe, *Topics in geometric group theory*, University of Chicago Press, 2000.
- [HB82] Bertram Huppert and Norman Blackburn, *Finite groups II*, Springer-Verlag, Berlin, 1982, AMD, 44.
- [Her94] Israel N. Herstein, *Noncommutative rings*, Carus Mathematical Monographs, vol. 15, Mathematical Association of America, Washington, DC, 1994, Reprint of the 1968 original, With an afterword by Lance W. Small.
- [HGC99] Pierre de la Harpe, Rostislav I. Grigorchuk, and Tullio G. Ceccherini-Silberstein, *Amenability and paradoxical decompositions for pseudogroups and discrete metric spaces*, Trudy Mat. Inst. Steklov. **224** (1999), no. Algebra. Topol. Differ. Uravn. i ikh Prilozh., 68–111, Dedicated to Academician Lev Semenovich Pontryagin on the occasion of his 90th birthday (Russian).
- [HK97] Nigel Higson and Gennadi G. Kasparov, *Operator K-theory for groups which act properly and isometrically on Hilbert space*, Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc. **3** (1997), 131–142 (electronic).
- [Hoř63] Jiří Hořejš, Преобразования, определенные конечными автоматами (= transformations, defined by finite automata), Problemy Kibernet. **9** (1963), 23–26.
- [HRV93a] Pierre de la Harpe, A. Guyan Robertson, and Alain Valette, *On the spectrum of the sum of generators for a finitely generated group*, Israel J. Math. **81** (1993), no. 1-2, 65–96.
- [HRV93b] Pierre de la Harpe, A. Guyan Robertson, and Alain Valette, *On the spectrum of the sum of generators of a finitely generated group. II*, Colloq. Math. **65** (1993), no. 1, 87–102.
- [Jac41] Nathan Jacobson, *Restricted Lie algebras of characteristic p* , Trans. Amer. Math. Soc. **50** (1941), 15–25.
- [Jac62] Nathan Jacobson, *Lie algebras*, Interscience Publishers (a division of John Wiley & Sons), New York-London, 1962, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, No. 10.
- [Jen41] Stephen A. Jennings, *The structure of the group ring of a p -group over a modular field*, Trans. Amer. Math. Soc. **50** (1941), 175–185.
- [Jen55] Stephen A. Jennings, *The group ring of a class of infinite nilpotent groups*, Canad. J. Math. **7** (1955), 169–187.
- [Kač96] Mark Kač, *Can one hear the shape of a drum?*, Amer. Math. Monthly **73** (1996), no. 4, 1–23.
- [Kaï80] Vadim A. Kaïmanovič, *The spectral measure of transition operator and harmonic functions connected with random walks on discrete groups*, Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) **97** (1980), 102–109, 228–229, 236, Problems of the theory of probability distributions, VI.
- [Kal45] Lev A. Kaloujnine, *Sur les p -groupes de Sylow du groupe symétrique du degré p^m* , C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **221** (1945), 222–224.
- [Kal46] Lev A. Kaloujnine, *Sur les p -groupes de Sylow du groupe symétrique du degré p^m . (Suite centrale ascendante et descendante.)*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **223** (1946), 703–705.
- [Kal48] Lev A. Kaloujnine, *La structure des p -groupes de Sylow des groupes symétriques finis*, Ann. École Norm. Sup. (3) **65** (1948), 239–276.
- [Kaž65] David A. Každan, *Uniform distribution on a plane*, Trudy Moskov. Mat. Obšč. **14** (1965), 299–305.
- [Kes59] Harry Kesten, *Symmetric random walks on groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **92** (1959), 336–354.
- [KLP97] Gundel Klaas, Charles R. Leedham-Green, and Wilhelm Plesken, *Linear pro- p -groups of finite width*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1674, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [Koc70] Helmut Koch, *Galoissche Theorie der p -Erweiterungen*, Springer-Verlag, Berlin, 1970, Mit einem Geleitwort von I. R. Šafarevič.
- [Kou98] Malik Koubi, *Croissance uniforme dans les groupes hyperboliques*, to appear, 1998.
- [Kro99] Leopold Kronecker, *Werke*, vol. I–V, Teubner, Leipzig, 1899 (german).

- [Laz53] Michel Lazard, *Sur les groupes nilpotents et les anneaux de lie*, Ann. École Norm. Sup. (3) **71** (1953), 101–190.
- [Laz65] Michel Lazard, *Groupes analytiques p -adiques*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **26** (1965), 389–603.
- [Leo98a] Yuriĭ G. Leonov, *On growth function for some torsion residually finite groups*, International Conference dedicated to the 90th Anniversary of L.S.Pontryagin (Moscow), vol. Algebra, Steklov Mathematical Institute, September 1998, pp. 36–38.
- [Leo98b] Yuriĭ G. Leonov, *On lower estimation of growth for some torsion groups*, to appear, 1998.
- [Leo99] Yuriĭ G. Leonov, *On precisement of estimation of periods' growth for Grigorchuk's 2-groups*, unpublished, 1999.
- [LG94] Charles R. Leedham-Green, *The structure of finite p -groups*, J. London Math. Soc. (2) **50** (1994), no. 1, 49–67.
- [Li96] Wo Li, *Number theory with applications*, World Scientific, 1996.
- [Lia96] Fabrice Liardet, *Croissance des groupes virtuellement abéliens*, Ph.D. thesis, University of Geneva, 1996.
- [LM91] Alexander Lubotzky and Avinoam Mann, *On groups of polynomial subgroup growth*, Invent. Math. **104** (1991), no. 3, 521–533.
- [Lub94] Alexander Lubotzky, *Discrete groups, expanding graphs and invariant measures*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1994.
- [Lub95a] Alexander Lubotzky, *Cayley graphs : Eigenvalues, expanders and random walks*, Surveys in combinatorics, 1995 (Stirling), Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995, pp. 155–189.
- [Lub95b] Alexander Lubotzky, *Subgroup growth*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994) (Basel), Birkhäuser, 1995, pp. 309–317.
- [Lüc94] Wolfgang Lück, *Approximating L^2 -invariants by their finite-dimensional analogues*, Geom. Funct. Anal. **4** (1994), no. 4, 455–481.
- [LW92] Jacobus H. van Lint and Richard M. Wilson, *A course in combinatorics*, Cambridge University Press, 1992.
- [Lys85] Igor G. Lysionok, *A system of defining relations for the Grigorchuk group*, Mat. Zametki **38** (1985), 503–511.
- [Mac76] George W. Mackey, *The theory of unitary group representations*, University of Chicago Press, Chicago, Ill., 1976, Based on notes by James M. G. Fell and David B. Lowdenslager of lectures given at the University of Chicago, Chicago, Ill., 1955, Chicago Lectures in Mathematics.
- [Mag40] Wilhelm Magnus, *Über Gruppen und zugeordnete Liesche Ringe*, J. Reine Angew. Math. **182** (1940), 142–149.
- [Mal95] Leonid Malozemov, *Random walk and chaos of the spectrum. Solvable model*, Chaos Solitons Fractals **5** (1995), no. 6, 895–907.
- [Mei54] Günter Meinardus, *Asymptotische Aussagen über Partitionen*, Math. Z. **59** (1954), 388–398.
- [Mic] Gerhard O. Michler, *The character values of multiplicity-free irreducible constituents of a transitive permutation representation*, to appear.
- [Mil68a] John W. Milnor, *Growth of finitely generated solvable groups*, J. Differential Geom. **2** (1968), 447–449.
- [Mil68b] John W. Milnor, *Problem 5603*, Amer. Math. Monthly **75** (1968), 685–686.
- [Mos81] Jürgen Moser, *An example of a Schroedinger equation with almost periodic potential and nowhere dense spectrum*, Comment. Math. Helv. **56** (1981), no. 2, 198–224.
- [MP99] Roman Muchnik and Igor Pak, *On growth of Grigorchuk groups*, preprint, 1999.
- [MV98] Florian Martin and Alain Valette, *Markov operators on the solvable Baumslag-Solitar groups*, to appear, 1998.
- [MW89] Bojan Mohar and Wolfgang Woess, *A survey on spectra of infinite graphs*, Bull. London Math. Soc. **21** (1989), no. 3, 209–234.
- [MZ99] Consuelo Martinez and Efim I. Zel'manov, *Nil algebras and unipotent groups of finite width*, To appear in Advances in Math., 1999.
- [Nor92] Sam Northshield, *Cogrowth of regular graphs*, Proc. Amer. Math. Soc. **116** (1992), no. 1, 203–205.
- [Nov97] Sergueĭ P. Novikov, *The Schrödinger operator on graphs, and topology*, Uspekhi Mat. Nauk **52** (1997), no. 6(318), 177–178.
- [NS99] Volodymyr V. Nekrashevych and Vitaliĭ Ī. Suščans'kiĭ, *On confinal dynamics of rooted tree automorphisms*, preprint, 1999.
- [Par92] Walter Parry, *Growth series of some wreath products*, Trans. Amer. Math. Soc. **331** (1992), no. 2, 751–759.
- [Par93] Walter Parry, *Growth series of Coxeter groups and Salem numbers*, J. Algebra **154** (1993), 406–415.

- [Pas77] Donald S. Passman, *The algebraic structure of group rings*, Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1977, Pure and Applied Mathematics.
- [Pas79] Inder Bir S. Passi, *Group rings and their augmentation ideals*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 715, Springer, Berlin, 1979.
- [Pas93] William L. Paschke, *Lower bound for the norm of a vertex-transitive graph*, Math. Z. **213** (1993), no. 2, 225–239.
- [Pau99] Frédéric Paulin, *Analyse harmonique des relations d'équivalence mesurées discrètes*, Markov Proc. Rel. Fields **5** (1999), 163–200.
- [Pet93] Victor M. Petrogradskii, *Some type of intermediate growth in Lie algebras*, Uspekhi Mat. Nauk **48** (1993), no. 5(293), 181–182.
- [Pet96] Victor M. Petrogradskii, *Intermediate growth in Lie algebras and their enveloping algebras*, J. Algebra **179** (1996), no. 2, 459–482.
- [Pre98] Joseph P. Preville, *Graph substitutions*, Ergodic Theory Dynam. Systems **18** (1998), no. 3, 661–685.
- [Que94] Gregory Quenell, *Combinatorics of free product graphs*, Geometry of the spectrum (Seattle, WA, 1993), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, pp. 257–281.
- [Qui68] Daniel G. Quillen, *On the associated graded ring of a group ring*, J. Algebra **10** (1968), 411–418.
- [Röv99a] Claas E. Röver, *Constructing finitely presented simple groups that contain Grigorchuk groups*, J. Algebra **220** (1999), no. 1, 284–313.
- [Röv99b] Claas E. Röver, *Subgroups of finitely presented simple groups*, Ph.D. thesis, Oxford, 1999.
- [Roz86] Alexander V. Rozhkov, К Теории Групп Алешинского Типа (*russian*), Mat. Zametki **40** (1986), no. 5, 572–589.
- [Roz96a] Alexander V. Rozhkov, *Lower central series of a group of tree automorphisms*, Mat. Zametki **60** (1996), no. 2, 225–237, 319.
- [Roz96b] Alexander V. Rozhkov, *Conditions of finiteness in groups of automorphisms of trees*, Habilitation thesis, Chelyabinsk, 1996.
- [RS80] Grzegorz Rozenberg and Arto Salomaa, *The mathematical theory of L systems*, Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1980.
- [Rud91] Walter Rudin, *Functional analysis*, second ed., McGraw-Hill Inc., New York, 1991.
- [RZ99] Luis Ribes and Pavel Zalesskii, *Pro-p trees and applications*, Birkhäuser, Basel, 1999, to appear in Horizons in Profinite Groups (Dan Segal ed.).
- [S⁺93] Martin Schönert et al., *GAP : Groups, algorithms and programming*, RWTH Aachen, 1993.
- [Sal45] Raphael Salem, *Power series with integral coefficients*, Duke Math. J. **12** (1945), 153–172.
- [Seg00] Dan Segal, *The finite images of finitely generated groups*, Proceedings of the Conference in Bielefeld, 2000, to appear.
- [Ser95] Jean-Pierre Serre, *Cours d'arithmétique*, quatrième ed., PUF, 1995.
- [Ser97] Jean-Pierre Serre, *Répartition asymptotique des valeurs propres de l'opérateur de Hecke T_p* , J. Amer. Math. Soc. **10** (1997), no. 1, 75–102.
- [Sha95a] Aner Shalev, *Finite p-groups*, Finite and locally finite groups (Istanbul, 1994), Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1995, pp. 401–450.
- [Sha95b] Aner Shalev, *Some problems and results in the theory of pro-p groups*, Groups '93 Galway/St. Andrews, Vol. 2, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 212, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995, pp. 528–542.
- [Sid87a] Said N. Sidki, *On a 2-generated infinite 3-group : subgroups and automorphisms*, J. Algebra **110** (1987), no. 1, 24–55.
- [Sid87b] Said N. Sidki, *On a 2-generated infinite 3-group : the presentation problem*, J. Algebra **110** (1987), no. 1, 13–23.
- [Sto96] Michael Stoll, *Rational and transcendental growth series for the higher Heisenberg groups*, Invent. Math. **126** (1996), no. 1, 85–109.
- [Suš79] Vitalii Ī Suščans'kii, *Periodic p-groups of permutations and the unrestricted Burnside problem*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **247** (1979), no. 3, 557–561.
- [Sva55] A. S. Svarts, *A volume invariant of coverings*, Dokl. Akad. Nauk SSSR (1955), no. 105, 32–34 (Russian).
- [Szw89] Ryszard Szwarc, *A short proof of the Grigorchuk-Cohen cogrowth theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **106** (1989), no. 3, 663–665.
- [Tit72] Jacques Tits, *Free subgroups in linear groups*, J. Algebra **20** (1972), 250–270.
- [Val89] Alain Valette, *The conjecture of idempotents : A survey of the C*-algebraic approach*, Bull. Soc. Math. Belg. Sér. A (1989), no. 3, 485–521.

- [vN29] John von Neumann, *Zur allgemeinen Theorie des Masses*, Fund. Math. **13** (1929), 73–116 and 333, = *Collected works*, vol. I, pages 599–643.
- [Voi90] Dan Voiculescu, *Noncommutative random variables and spectral problems in free product C^* -algebras*, Rocky Mountain J. Math. **20** (1990), no. 2, 263–283.
- [Vov98] Taras Vovkivsky, *Infinite torsion groups arising as generalisations of the second grigorchuk group*, International Conference dedicated to the 90th Anniversary of L.S.Pontryagin (Moscow), vol. Algebra, Steklov Mathematical Institute, September 1998, pp. 36–38.
- [VZ93] Michael Vaughan-Lee and Efim I. Zel'manov, *Upper bounds in the restricted Burnside problem*, J. Algebra **162** (1993), no. 1, 107–145.
- [VZ96] Michael Vaughan-Lee and Efim I. Zel'manov, *Upper bounds in the restricted Burnside problem. II*, Internat. J. Algebra Comput. **6** (1996), no. 6, 735–744.
- [Woe94] Wolfgang Woess, *Random walks on infinite graphs and groups — a survey on selected topics*, Bull. London Math. Soc. **26** (1994), 1–60.
- [Wol68] Joseph A. Wolf, *Growth of finitely generated solvable groups and curvature of Riemannian manifolds*, J. Differential Geom. **2** (1968), 421–446.
- [Zas40] Hans Zassenhaus, *Ein Verfahren, jeder endlichen p -Gruppe einen Lie-Ring mit der Charakteristik p zuzuordnen*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **13** (1940), 200–207.
- [Zel95a] Efim I. Zel'manov, *Lie ring methods in the theory of nilpotent groups*, Groups '93 Galway/St. Andrews, Vol. 2, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 212, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995, pp. 567–585.
- [Zel95b] Efim I. Zel'manov, *More on Burnside's problem*, Combinatorial and geometric group theory (Edinburgh, 1993), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 204, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995, pp. 314–321.
- [Zel96] Efim I. Zel'manov, *Talk at the ESF conference on algebra and discrete mathematics "Group Theory : from Finite to Infinite"*, Castelvecchio Pascoli, 13–18 July 1996.
- [Zel97] Efim I. Zel'manov, *On the restricted Burnside problem*, Fields Medallists' lectures, World Sci. Ser. 20th Century Math., vol. 5, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1997, pp. 623–632.

Index

- *-dimension de Hausdorff, **20**
- L -présentation, **42**
- N -suite, **45**
- S -fini, **18**
- S -portrait, **18**
- \mathfrak{S} (premier groupe de Grigorchuk), 41
- p -suite, **45**
- Šunik, Zoran, 7, 9, 16, 49, 51, 81
- Алешин, Сергей В. (= Alëshin, Sergey V.), 26
- Гельфанд, Израиль Моисеевич (= Gel'fand, Israel Moiseevich), 8, 35
- Голод, Евгений Соломонович (= Golod, Evgueniï Solomonovich), 26
- Григорчук, Ростислав Иванович (= Grigorchuk, Rostislav Ivanovich), 7–11, 15, 16, 25–27, 29, 31, 33, 37, 41, 42, 44, 46, 48, 51, 55, 57–59, 67–69, 71–73, 81
- Громов, Михайл Л. (= Gromov, Mikhael L.), 29, 30
- Калужнин, Лев Аркадьевич (= Kaloujnine, Lev Arkadévitch), 16, 17, 20
- Лысёнок, Игорь Геронтьевич (= Lysënok, Igor Geront'evich), 42
- Ольшанский, Александр Юрьевич (= Ol'shanskiï, Alexander Yurevich), 26
- Рожков, Александр В. (= Rozhkov, Alexander V.), 42, 46, 51
- Суцанский, Виталий И. (= Sushchanskiï, Vitaliï I.), 16, 26, 34

- action
 - d'un automate, 21
 - ergodique, 19
 - sur \mathbb{H} , 33
 - sur l'intervalle, 15
 - transitive, 10
- algèbre(s)
 - d'entrelacement, **35**
 - de Hecke, **35**
 - de Lie, 42, 45
- arête(s), **15, 55**
 - boucle, **55**
 - consécutives, **55**
 - destination, **55**
 - source, **55**
- arbre(s), 15
 - régulier enraciné, **15**
 - série de Green, 61
- automates
 - groupe à, **22**
 - groupes et, 21
 - automorphisme(s)
 - automatiques, **21**
 - dirigé, **22**
 - fini, **22**
- Bass, Hyman, 30
- Benson, Max, 29
- bord d'un arbre, **16**
- Burnside, William, 25, 41, 45

- Cantor, Georg Ferdinand Ludwig Philip, 7, 19, 38
- Cayley, Arthur, 8, 10, 15, 34, 47, 48, 58, 59, 62, 63, 81
- Ceccherini-Silbertin, Tullio Giacomo, 11, 46, 81
- chemin, **55**
 - bosse en i , **56**
 - début, **55**
 - fin, **56**
 - longueur, **55**
 - nombre de bosses, **56**
 - produit, **56**
- circuit, **56**
- classes de confinalité, **34**
- cocroissance, **57**
- Cohen, Joel, 59
- commensurateur, 35, **35**
- complétion profinie, **20**
- congruence, **19, 44, 69**
 - quantitative, 36
- croissance, 48
 - asymptotique, 30
 - borne inférieure, 49
 - borne supérieure, 49
 - dans les groupes, 29
 - des chemins, 55
 - des groupes GGS , 75
 - exponentielle, **30**
 - intermédiaire, **30**
 - polynômiale, **30**
 - polynomiale, 30
 - rationnelle, 29
 - sous-exponentielle, **30**
 - superpolynômiale, **30**
 - uniformément exponentielle, **46**
- digraphe(s), **15**
 - fini, **15**
- dimension de Hausdorff, **20**

- ergodique, 19
- espaces homogènes, 44
- Fabrykowski, Jacek, 27, 68
- fonction(s)
 - équivalentes, **30**
 - de croissance, **29**
 - de croissance des périodes, **51**
 - dominée, **30**
- Frobenius, Georg Ferdinand, 45
- fusion élémentaire, **75**
- graphe(s), **55**
 - 4-régulier, 38
 - d -régulier, **16, 55**
 - de Cayley, 8, 10, 15, **15**, 34, 47, **47**, 48, 58, 59, 62, 63, 81
 - de Schreier, 7, 34, **34**, 34, 38, 40, 44, **57, 57**
 - fini, **55**
 - localement fini, **55**
 - produit libre, **63**
 - réguliers, 34
- Green, John W., 10, 56, 58, 59, 63
- groupe(s)
 - GGS*, **67**
 - à automates, **21**
 - à base dénombrable, **20**
 - à branches, **25**
 - à branches faibles, **25**
 - à branches régulières, **25**
 - décomposition, 33
 - à colonne vertébrale, **51**
 - automates et, 21
 - croissance, **29**
 - de Heisenberg, 29
 - de la racine, **67**
 - de largeur finie, **46**
 - de niveau, **51**
 - de Nottingham, 46
 - de racine, **51**
 - de torsion, 51, 71
 - fractal, **19**
 - hyperbolique, 29
 - juste non-résoluble, **26**
 - juste-infini, **26, 46**
 - presque à branches, **73**
 - profinis, 19
 - proto-*GGS*, **67**
 - régulier, **51**
 - spécial, **27**
 - sphériquement transitif, **19**
 - virtuellement abélien, 29
 - virtuellement nilpotent, 30
- Guivarc'h, Yves, 30
- Gupta, Narain Datt, 10, 26, 27, 37, 67, 68
- Higman, Graham, 44
- Hilbert, David, 47
- Hořejš, Jiří, 21
- Jennings, Stephen, 45
- Kesten, Harry, 9, 61
- Lazard, Michel, 45
- Liardet, Fabrice, 29
- longueur d'un élément, **57**
- Mackey, George, 35
- Magnus, Wilhelm, 45
- marche aléatoire simple, **57**
- Mealy, George H., 21
- mesure spectrale, **37**
- Milnor, John, 25, 31
- Moore, Christopher, 21
- morphisme de graphes, **55**
- Muchnik, Roman, 49
- Nekrashevych, Volodymyr, 34
- Northshield, Sam, 59
- paire de Gel'fand, 8, 35
- Pak, Igor, 49
- poids sur un système de générateurs, **29**
- Poincaré, Henri, 46, 47
- Poincaré-Birkhoff-Witt, 46
- portrait
 - à branches, **25**
 - d'un élément, **17**
- présentation
 - L , 42
 - finie, 72
- pro- p -complétion, **20**
- profondeur d'un portrait, **18**
- Quenell, Gregory, 10, 63
- Röver, Claas, 44
- rayon spectral, **57**
- représentation(s)
 - induites, 35
 - quasi-régulière, 35
- série(s)
 - de chemins, **56**
 - enrichie, **56**
 - propres, **56**
 - de circuits, **56**
 - enrichie, **56**
 - de cocroissance, **57**
 - de croissance, 29, **57**
 - de Green, **56**
 - algébriques, 63
 - produit libre, 63
- Schreier, Oskar, 7, 34, 38, 40, 44, 57
- Sidki, Saïd N., 10, 26, 27, 37, 44, 67, 68
- sommet(s), **15, 55**
 - adjacents, **55**
 - degré, **55**
 - distance, **56**
- sous-arbre en σ , **16**
- sous-groupe(s), 18
 - de sommet, **18**
 - de Sylow, 20
 - faiblement maximal, **34**
 - parabolique, **33**
 - stabilisateurs, 41
- spectre d'une représentation, **37**
- stabilisateur restreint, **18**
- suite(s)

- p*-centrale descendante, **45, 47**
- r*-factorisable, **52**
- r*-homogène, **52**
- centrale descendante, 46
- complète, **51**
- confinales, **34**
- dérivées, 41
- de récurrence, **67**
- sur-groupe de sommet, **18**
- systèmes *L*, **42**
- Szwarc, Ryszard, 59

- Tits, Jacques, 30
- transducteur(s)
 - équivalents, **21**
 - minimal, **21**

- Voiculescu, Dan Virgil, 10, 63
- Vovkivsky, Taras, 71

- Wilson, John, 16
- Woess, Wolfgang, 59

- Zel'manov, Efim, 9, 45, 46